

## 経済発展と人的資本：Lucas体系とRebelo体系の統合化・一般化とその考察

片桐, 昭司

<https://doi.org/10.15017/3000065>

---

出版情報：経済論究. 87, pp.45-71, 1993-11-30. 九州大学大学院経済学会  
バージョン：  
権利関係：



# 経済発展と人的資本

—Lucas 体系と Rebelo 体系の統合化・一般化とその考察—

片 桐 昭 司

## 目 次

1. 序
2. 両体系の統合化・一般化
3. 各体系の成長率と統合化・一般化の考察
4. 結語

## 1. 序

経済発展に関しては、貯蓄率、技術と人口成長率を外生的に扱った Solow [13], Swan[15]等を始めとして様々な分析および研究がこれまでなされてきた<sup>1)</sup>。しかしながら、現実には、各国間で1人当りの国民所得成長率あるいは所得水準に大きな格差が生じ、この現象を外生的成長モデルである新古典派モデルでは説明できないことが指摘されるようになってきた。Lucas[7]では、Denison[6]によるアメリカ合衆国のデータが使われることによって、経済成長率が理論値と現実値と合致しないことが、さらに貯蓄率や技術のみが成長の要因でないということが指摘されている。さらに「新古典派モデルが取り扱わなかった家計当りの manhour の変化があり、まだ労働の分配率も新古典派が仮定したように一定ではなく上昇している。」(Lucas[7], p. 11)と言及されている。こうして新古典派モデルにおいて、経済成長率を決定するものとして扱われた外生的要因(貯蓄率、技術および人口成長率)の問題が指摘され、これに代わって Lucas[7]や Rebelo[9]等においては、人的資本を導入することによって経済システム内部で成長率が決定される内生的成長モデルが展開され、現実の経済成長が説明されるようになってきた。Lucas 体系と Rebelo 体系で

は、人的資本が生産関数と蓄積方程式に導入され、持続的成長状態での競争均衡経路の各成長率が求められている。しかし両体系ではその物的資本や人的資本の導入方法が異なっているため、各帰結を導出するためには各体系毎にそれぞれの手続きを経て展開がなされねばならず、さらに Rebelo の場合、最大値原理の導入が明示されておらず、導出された結果を得ることが厄介である。

以上を考慮し、本稿では動学モデルに内生的成長の要因の1つである人的資本を導入した Lucas[7] と Rebelo[9] の体系を統合化・一般化し、その一般的な体系で求められた関係式を使って各経済変数の成長率を導出し、さらにその統合化・一般化の意味を考察することにする。以下、第2章で Lucas 体系と Rebelo 体系の統合化・一般化を行い、第3章では一般的な体系における帰結を利用して各体系毎の成長率を導出し、統合化・一般化の意味を考察することにする。最後に第4章で結語として、本稿の意義を簡単に述べることにする。

### 第1章の注

- 1) Stern, N., "The Economics of Development: A Survey", *Economic Journal*, 99, 1989, 597-685 を参照のこと

## 2. Lucas 体系と Rebelo 体系の統合化・一般化

まず、統合化・一般化された体系のもとで使用される前提および定義を以下に述べることにする。

### 2-1 記号

記号の定義は以下のとおりである。

|        |   |                       |
|--------|---|-----------------------|
| $Y(t)$ | = | $t$ 期における国民総生産        |
| $y(t)$ | = | $t$ 期における国民1人当りの国民総生産 |
| $C(t)$ | = | $t$ 期における消費           |
| $c(t)$ | = | $t$ 期における1人当りの消費      |

- $K(t)$  =  $t$  期における資本  
 $N(t)$  =  $t$  期における総労働力人口  
 $H(t)$  =  $t$  期における人的資本  
 $\phi(t)$  =  $t$  期における物的資本への分配率  
 $u(t)$  =  $t$  期における人的資本への時間配分  
 $Ne(t)$  =  $t$  期における効率単位での労働力人口  
 $(Ne = u(t)H(t)N(t))$   
 $L$  = 余暇時間の割合  
 $\delta$  = 資本の減耗率  $\delta > 0$   
 $\sigma$  = リスク回避率  $\sigma > 0$   
 $\rho$  = 割引率  $\rho > 0$

## 2-2 前提

本章で使用される前提は以下のとおりである。

前提1：労働人口は、現在時点における所与の水準、 $N_0$  から、同一の率  $m > 0$  で外生的に成長する。

$$N(t) = e^{mt} N_0$$

前提2：以下のような性質を持っている関数  $U = U(c) : R_+^1 \rightarrow R$  は代表的個人の適切な性質を持つ効用関数と呼ばれる。尚、各個人は各  $t$  で、一定の余暇 ( $L$ ) を含んで1単位の時間を賦与され、無限期間まで生きると想定され、さらに労働能力および選好は同一であるとする。

(1) 2回連続微分可能性：

$U(c) : R_+^1 \rightarrow R$  は2回連続微分可能である。

(2) 限界効用の正值性：

任意の  $c > 0$  に対して、 $U_c(c) > 0$ ,

ここで、 $U_c = dU(c)/dc$

(3) 限界効用の逓減性：

任意の  $c > 0$  に対して,  $U_{cc}(c) < 0$ ,

ここで,  $U_{cc} = d^2 U(c) / dc^2$

(4) 限界条件:

$$\lim_{c \rightarrow 0} U_c(c) = +\infty$$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} U_c(c) = 0$$

また  $[(c(t))_{t=0}^{\infty}, (u(t))_{t=0}^{\infty}, (K(t))_{t=0}^{\infty}, (H(t))_{t=0}^{\infty}] \in S(K_0, H_0)$  に対する  $T$  までの各家計の総和は次のように表される。

$$W(t) = \int_0^T e^{-\rho t} U(c(t)) e^{mt} dt \quad (2-1)$$

前提 3: 生産に関する技術的状况はそれに割り振られた物的資本  $K_1(t)$  と効率単位での労働人口  $Ne^1(t)$  に対して, (それを効率的に使用して,) 生産可能な  $Y(t)$  を対応づけるマクロ的生産関数によって表されるものとする。

$$\begin{aligned} Y(t) &= F(K_1(t), Ne^1(t)) Ha(t)^\alpha \\ &= E(\phi(t)K(t), H(t), u(t), N(t), Ha(t)) \end{aligned} \quad (2-2)$$

ここで生産関数  $F(K_1(t), Ne^1(t))$  は適切な性質を持つ生産関数で<sup>1)</sup>,  $K_1(t) = \phi(t)K(t)$ ,  $Ne^1(t) = u(t)H(t)N(t)$  であり,  $Ha(t)$  は外部効果<sup>2)</sup> である。

前提 4: 物的資本ストックおよび人的資本ストックは一定の率  $\delta > 0$  で減耗する。

前提 5: 人的資本に関する技術的状况は次のように想定されている。各労働者は各期に使用できる時間 1 単位を持ち, 外生的に決められた余暇時間  $L$  を消費し, 残った時間  $(1 - L - u(t))$  を人的資本の生産に投じる。したがって人的資本の生産は割り振られた物的資本  $(1 - \phi(t))K(t)$  と  $(1 - L - u(t))H(t)$  の効率単位の労働によって新たに創出される。

$$\dot{H}(t) = G(K_2(t), Ne^2(t)) = G((1 - \phi(t))K(t), H(t), u(t)) - \delta H(t) \quad (2-3)$$

ここで,  $K_2(t) = (1 - \phi(t))K(t)$ ,  $Ne^2(t) = (1 - L - u(t))H(t)$  で, 生産関数  $H = G(K_2(t), Ne^2(t))$  は以下の様な性質を持つ関数である。

(1) (規模に関する収穫一定性): 任意の  $(K_2, Ne^2) \in R_+^2$  と任意の  $\alpha > 0$  に対して,

$$G(\alpha K_2, \alpha Ne^2) = \alpha G(K_2, Ne^2).$$

(2) (2回連続微分可能性):  $G(K_2, Ne^2)$  は  $R_+^2$  で, 2回連続微分可能である。

前提6: 家計は資本と労働力を所有し, 賃金やレントと引き換えに競争的企業に家計のサービスを販売する。

以上の設定のもとで, 次のことが成立する。

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) + \delta K(t) + C(t) &= F(\phi(t)K(t), u(t)H(t)N(t))Ha(t)^\alpha \\ \dot{H}(t) &= G((1-\phi(t))K(t), H(t), u(t), N(t)) - \delta H(t) \end{aligned}$$

### 2-3 定義

次に本章で使用される定義を述べることにする。

定義1:  $(K_0, H_0)$  を所与として, 次の諸条件をみたす時間経路の組  $[(c(t))_{t=0}^\infty, (u(t))_{t=0}^\infty, (K(t))_{t=0}^\infty, (H(t))_{t=0}^\infty]$  を  $(K_0, H_0)$  から出発する実行可能な経済発展経路とする。

- (1)  $c(t): [0, \infty) \rightarrow R_+^1$  と  $u(t): [0, \infty) \rightarrow R_+^1$  は区分的連続関数である。
- (2)  $H(t): [0, \infty) \rightarrow R_+^1$  と  $K(t): [0, \infty) \rightarrow R_+^1$  は区分的連続微分可能な関数である。
- (3) ほとんどすべての  $t \in [0, \infty)$  に対して,

$$\dot{K}(t) = F(K_1(t), Ne^1(t))Ha(t)^\alpha - N(t)c(t) - \delta K(t) \quad (2-4)$$

$$\dot{H}(t) = G(K_2(t), Ne^2(t)) - \delta H(t) \quad (2-3)'$$

- (4)  $K(0) = K_0, H(0) = H_0$

ここで,  $(K_0, H_0)$  から出発する実行可能な経済発展経路全体の集合を  $S(K_0, H_0)$  とする。

定義2: 蓄積方程式 (2-3) 式および (2-4) 式を満たし, すべての内生的変数が一定の率で成長するような成長状態 (steady-state growth) を持続的成長状態と呼ぶ。

**定義 3:** 個別的家計と民間部門の最大化問題を考えるとき、 $Ha(t)$  が外生的に決定されるものとして、各制約式の下で、効用を最大化するように  $H(t)$ ,  $K(t)$ ,  $c(t)$ ,  $u(t)$  を選択し、 $Ha(t)=H(t)$  が一致するような経路を競争均衡経路<sup>3)</sup>と呼ぶ。

## 2-4 競争均衡成長に付随する成長率

さて以上のことを前提として、一般的体系のもとで、競争均衡経路に付随する経済変数の成長率を以下のようにして求めていくことにしよう。

### (1) 準備

両体系の統合化による各成長率を求める前に、必要とされる関係式を導出しおくことにする。まず、 $N(t)$  と  $Ha(t)$  を所与として、(2-2)―(2-4) 式を使って、現在価値ハミルトニアンを作ると、

$$\begin{aligned}\tilde{H}(c, K, H, \phi, u, ) &= U(c) + \theta_1 \{E(K, H, \phi, u, N(t), Ha(t)) \\ &\quad - N(t)c - \delta K\} + \theta_2 \{G(K, H, \phi, u) - \delta H\} \quad (2-5) \\ \theta_1, \theta_2: &\text{未知補助変数}\end{aligned}$$

のように表すことができる。(2-5) 式に対し、F. O. C. を求める。

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial c} = U_c(\bullet) - \theta_1 = 0 \quad (2-6)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} = \theta_1 E_\phi(\bullet) + \theta_2 G_\phi(\bullet) = 0 \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = \theta_1 E_u(\bullet) + \theta_2 G_u(\bullet) = 0 \quad (2-8)$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \rho \theta_1 - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial K} \\ &= \rho \theta_1 - \theta_1 \{E_K(\bullet) - \delta\} - \theta_2 G_K(\bullet) \\ &= \rho \theta_1 - \theta_1 E_K(\bullet) + \theta_1 \delta - \theta_2 G_K(\bullet) \quad (2-9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= \rho \theta_2 - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial H} \\ &= \rho \theta_2 - \theta_1 E_H(\bullet) - \theta_2 G_H(\bullet) + \theta_2 \delta \quad (2-10)\end{aligned}$$

横断性の条件 (TVC)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) \theta_1(t) e^{-\rho t} = 0 \quad (2-11)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) \theta_2(t) e^{-\rho t} = 0 \quad (2-12)$$

## (2) 物的資本の成長率

以上の準備の下で、物的資本の成長率 ( $g_K = \dot{K}(t)/K(t)$ ) を求めることにする。この段階で  $Ha(t) = H(t)$  が成立していることに注意する。まず、(2-6) 式を時間で微分する。

$$\dot{\theta}_1 = U_{cc} \cdot \dot{c}(t) \quad (\dot{c}(t) = dc(t)/dt) \quad (2-13)$$

(2-7) 式を変形し、(2-9) 式に代入すると以下の式が得られる。

$$-\theta_2 = \theta_1 \cdot \frac{E_\phi(\bullet)}{G_\phi(\bullet)} \quad [G_\phi(\bullet) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-7)'$$

$$\theta_1 = \rho \theta_1 - \theta_1 E_K(\bullet) + \theta_1 \delta + \theta_1 \frac{E_\phi(\bullet) G_K(\bullet)}{G_\phi(\bullet)} \quad [G_\phi(\bullet) \neq 0 \text{ のとき}]$$

$$\theta_1 = \rho \theta_1 - \theta_1 E_K(\bullet) + \theta_1 \delta \quad [G_\phi(\bullet) = 0 \text{ のとき}]$$

さらに上の2つの式の両辺を  $\theta_1$  で割ると (2-14) 式または (2-14)' 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \rho - E_K(\bullet) + \delta + \frac{E_\phi(\bullet) G_K(\bullet)}{G_\phi(\bullet)} \quad [G_\phi(\bullet) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-14)$$

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \rho - E_K(\bullet) + \delta \quad [G_\phi(\bullet) = 0 \text{ のとき}] \quad (2-14)'$$

ここで (2-8) 式を変形して、それを (2-10) 式に代入する。

$$-\theta_1 = \theta_2 \cdot \frac{G_u(\bullet)}{E_u(\bullet)} \quad (2-8)'$$

$$\dot{\theta}_2 = \rho \theta_2 + \theta_2 \cdot \frac{G_u(\bullet) E_H(\bullet)}{E_u(\bullet)} - \theta_2 G_H(\bullet) + \theta_2 \delta$$

上の式の両辺を  $\theta_2$  で割ると (2-15) 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho + \frac{G_u(\cdot)E_H(\cdot)}{E_u(\cdot)} - G_H(\cdot) + \delta \quad (2-15)$$

また (2-7) 式と (2-8) 式より (2-16) 式という関係式を得る。

$$\frac{E_\phi(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} = \frac{E_u(\cdot)}{G_u(\cdot)} \quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-16)$$

さらに (2-6) 式および (2-13) 式より, (2-17) 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \quad (2-17)$$

また (2-4) 式を  $K(t)$  で割り, 操作すると (2-18) 式を得る。

$$\frac{N(t)c(t)}{K(t)} = \frac{E(\cdot)}{K(t)} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \quad (2-18)$$

ここで, ある  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\frac{E(\cdot)}{K(t)} = \varepsilon E_K(\cdot)$$

が成立するものとする。 $\varepsilon > 0$  の仮定が両体系を満足しているかどうかは確認する必要がある。従って (2-18) 式は

$$\frac{N(t)c(t)}{K(t)} = \varepsilon E_K(\cdot) - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \quad (2-18)'$$

となり, (2-14) 式, (2-14)' 式と (3-17) 式より, 以下の式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} = \rho - E_K(\cdot) + \delta + \frac{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}]$$

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} = \rho - E_K(\cdot) + \delta \quad [G_\phi(\cdot) = 0 \text{ のとき}]$$

上の 2 式から  $E_K$  を求めると (2-19) 式と (2-19)' 式ようになる。

$$E_K(\cdot) = \rho + \delta + \frac{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} - \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-19)$$

$$E_K(\cdot) = \rho + \delta - \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \quad [G_\phi(\cdot) = 0 \text{ のとき}] \quad (2-19)'$$

上の2式を(2-18)'式に代入すると、

$$\frac{N(t)c(t)}{K(t)} = \varepsilon \left\{ \rho + \delta + \frac{E_{\phi}(\cdot)G_K(\cdot)}{G_{\phi}(\cdot)} - \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \right\} \quad [G_{\phi}(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}]$$

$$- \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta$$

$$\frac{N(t)c(t)}{K(t)} = \varepsilon \left\{ \rho + \delta - \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \right\} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \quad [G_{\phi}(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}]$$

となり、上2式の両辺に対数を取り、時間で微分すると(2-20)式を得る。

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\frac{d}{dt} \log \left\{ \varepsilon[\cdot] - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \right\}}{\log \left\{ \varepsilon[\cdot] - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \right\}}$$

上式を $g_K$ について解くと(2-20)式を得る。

$$g_K = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} - \frac{\frac{d}{dt} \log \left\{ \varepsilon[\cdot] - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \right\}}{\log \left\{ \varepsilon[\cdot] - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \right\}}$$

$$= m + g_c - \frac{\frac{d}{dt} \log \left\{ \varepsilon[\cdot] - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \right\}}{\log \left\{ \varepsilon[\cdot] - \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \delta \right\}} \quad (2-20)$$

ここで、

$$[\cdot] = \rho + \delta + \frac{E_{\phi}(\cdot)G_K(\cdot)}{G_{\phi}(\cdot)} - \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \quad [G_{\phi}(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}]$$

$$[\cdot] = \rho + \delta + \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} \quad [G_{\phi}(\cdot) = 0 \text{ のとき}]$$

である。

### (3) 消費の成長率

ここでは、消費の成長率 ( $g_c = \dot{c}(t)/c(t)$ ) に関する関係式を求める。(2-14) 式、(2-14)' 式および (2-17) 式より

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} = \rho - E_K(\cdot) + \delta + \frac{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}]$$

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} = \rho - E_K(\cdot) + \delta \quad [G_\phi(\cdot) = 0 \text{ のとき}]$$

となって、 $\dot{c}(t)/c(t) = g_c$  について整理すると、(2-21) 式または (2-21)' 式のように消費の成長率を求めることができる。

$$g_c = \frac{U_c}{U_{cc}c(t)} \left[ \rho - E_K(\cdot) + \delta + \frac{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \right] \quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-21)$$

$$g_c = \frac{U_c}{U_{cc}c(t)} \left[ \rho - E_K(\cdot) + \delta \right] \quad [G_\phi(\cdot) = 0 \text{ のとき}] \quad (2-21)'$$

### (4) 人的資本の成長率

ここでは人的資本の成長率に関する関係式を求めることにする。まず (2-19) 式と (2-19)' 式を以下のように変形する。

$$\frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta = -E_K(\cdot) + \frac{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-19-1)$$

$$\frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta = -E_K(\cdot) \quad [G_\phi(\cdot) = 0 \text{ のとき}] \quad (2-19-1)'$$

上の 2 式を時間で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta \right] &= -\dot{E}_K(\cdot) + \frac{\dot{E}(\cdot)G_\phi(\cdot) - E_\phi(\cdot)\dot{G}_\phi(\cdot)}{\{G_\phi(\cdot)\}^2} \cdot G_K(\cdot) \\ &\quad + \frac{E_\phi(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \dot{G}_K(\cdot) \\ &\quad [G_\phi(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-22) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta \right] = -\dot{E}_K(\cdot) \quad [G_\phi(\cdot) = 0 \text{ のとき}] \quad (2-22)'$$

を得る。この式を (2-19-1) 式および (2-19-1)' 式で割ると (2-23) 式および (2-23)' 式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dt} \left[ \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta \right]}{\frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta} &= \frac{\frac{G_K(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \cdot \dot{E}_\phi(\cdot) - \frac{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)\dot{G}_\phi(\cdot)}{\{G_\phi(\cdot)\}^2}}{\frac{E_\phi(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \cdot G_K(\cdot) - E_K(\cdot)} \\ &\quad + \frac{\frac{\dot{G}_K(\cdot)}{G_K(\cdot)}}{1 - \frac{G_\phi(\cdot)E_K(\cdot)}{E_\phi(\cdot)G_K(\cdot)}} - \frac{\dot{E}_K(\cdot)}{\frac{E_\phi(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} \cdot G_K(\cdot) - E_K(\cdot)} \\ &\quad [G_\phi(\cdot), G_K(\cdot) \neq 0 \text{ のとき}] \quad (2-23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dt} \left[ \frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta \right]}{\frac{U_{cc}\dot{c}(t)}{U_c} - \rho - \delta} &= \frac{\dot{E}_K(\cdot)}{E_K(\cdot)} \\ &\quad [G_\phi(\cdot), G_K(\cdot) = 0 \text{ のとき}] \quad (2-23)' \end{aligned}$$

この (2-23) 式または (2-23)' 式に  $\dot{K}(t)/K(t) = g_K$ ,  $\dot{N}(t)/N(t) = m$ ,  $\dot{H}(t)/H(t) = g_H$  とおくことにより,

$$g_c = g(g_H) \quad (2-24)$$

という、消費の成長率  $g_c$  と人的資本の関係式を得る。ここで (2-8) 式を変形し時間で微分すると、以下の式を得る。

$$\theta_1 E_u(\bullet) = -\theta_2 G_u(\bullet) \quad (2-8)'$$

$$\dot{\theta}_1 E_u(\bullet) + \theta_1 \dot{E}_u(\bullet) = -\dot{\theta}_2 G_u(\bullet) - \theta_2 \dot{G}_u(\bullet)$$

上の式を (2-8)' 式で割ると (2-25) 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} + \frac{\dot{E}_u(\bullet)}{E_u(\bullet)} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + \frac{\dot{G}_u(\bullet)}{G_u(\bullet)} \quad (2-25)$$

(2-17) 式は  $\dot{\theta}_1/\theta_1 = U_{cc} \cdot \dot{c}(t)/U_c$  であるから、(2-25) 式と (2-17) 式より

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \frac{U_{cc} \dot{c}(t)}{U_c} + \frac{\dot{E}_u(\bullet)}{E_u(\bullet)} - \frac{\dot{G}_u(\bullet)}{G_u(\bullet)} \quad (2-26)$$

となり、 $\dot{K}(t)/K(t) = g_K$ ,  $\dot{N}(t)/N(t) = m$ ,  $\dot{H}(t)/H(t) = g_H$  を (2-26) 式に代入すれば (2-27) 式という関係式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \phi(g_K, m, g_H) \quad (2-27)$$

ここで、持続的成長状態では (2-15) 式 = (2-26) 式または (2-27) 式が成立するから、(2-28) 式という関係式を得る。

$$\rho + \frac{G_u(\bullet) E_H(\bullet)}{E_u(\bullet)} - G_H(\bullet) + \delta = \frac{U_{cc} \dot{c}(t)}{U_c} + \frac{\dot{E}_u(\bullet)}{E_u(\bullet)} - \frac{\dot{G}_u(\bullet)}{G_u(\bullet)} \quad (2-28)$$

この関係式に (2-24) 式を代入すれば基本的に人的資本の成長率  $g_H$  が求まる。

#### (5) 経済成長率

持続的成長状態での経済成長率 ( $g_Y = \dot{Y}(t)/Y(t)$ ) は (2-2) 式を時間で微分し、同式で割ると求まる。また  $g_Y$  は  $g_Y - m$  によって求めることができる。

$$\begin{aligned} Y(t) &= E_K(\bullet) \dot{K}(t) + E_N(\bullet) \dot{N}(t) + E_H(\bullet) \dot{H}(t) \\ g_Y &= \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} \\ &= \frac{E_K(\bullet) \dot{K}(t)}{Y(t)} + \frac{E_N(\bullet) \dot{N}(t)}{Y(t)} + \frac{E_H(\bullet) \dot{H}(t)}{Y(t)} - m \end{aligned} \quad (2-29)$$

## 第2章の注

- 1) 適切な性質を持つ生産関数については大住[18] pp. 30-31を参照のこと。
- 2) 全ての個々人は外部効果から利益を得るが、人的資本蓄積の決定においては  $H_a$  についての適切な効果を考慮することができず、また誰も各人の時間配分の割り振りを決定する際に、外部効果を考慮にいていない。このような  $H_a$  を外部効果と呼ぶ。(Lucas[7], p. 18)
- 3) 競争均衡経路の厳密な定義は大住[17] pp. 249-250を参照のこと。

## 3. 各体系の成長率と統合化・一般化の考察

前章で得られた統合化・一般化された体系のもとでの関係式を使って、Lucas 体系と Rebero 体系の各成長率を導出し、その統合化・一般化の意味を考察することにする。

### 3-1 Lucas 体系

各成長率を導出する前に Lucas 体系の概要を簡単に、そして準備としてここで使用される関連式を述べておくことにする。

#### モデル

生産に関する技術的状況は以下の式で与えられている。

$$\begin{aligned} Y(t) &= F(K_I(t), Ne^l(t)) H_a \\ &= AK(t)^{1-\tau} [u(t)H(t)N(t)]^\tau H_a(t)^\alpha \end{aligned} \quad (3-1)$$

物的資本蓄積は以下の式で与えられる。尚、資本の減耗率  $\delta$  はゼロと仮定されている。

$$\dot{K}(t) = AK(t)^{1-\tau} [u(t)H(t)N(t)]^\tau H_a(t)^\alpha - N(t)c(t) \quad (3-2)$$

人的資本蓄積は以下の式で与えられる。従って人的資本蓄積において物的資本  $K(t)$  は使用されず  $\phi(t)=1$  となり、余暇時間  $(L)=0$  である。尚、人的資本減耗はゼロと仮定されている。

$$\dot{H}(t) = H(t)\xi[1-u(t)] \quad (3-3)$$

$\xi$ : 定数

効用関数 (U) は以下の式で与えられる。

$$U = U(c) = \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (3-3)$$

準備 (関連式の導出)

$$E(\bullet) = AK(t)^{1-\gamma}u(t)H(t)N(t)^{\gamma}Ha(t)^{\alpha} \quad (3-5)$$

$$E_K(\bullet) = (1-\gamma)AK(t)^{1-\gamma}u(t)N(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma+\alpha} \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_K(\bullet) &= (1-\gamma)(-\gamma)AK(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}N(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma+\alpha}\dot{K}(t) \\ &\quad + (1-\gamma)\gamma AK(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}N(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma+\alpha}\dot{N}(t) \\ &\quad + (1-\gamma)(\gamma+\alpha)AK(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}N(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma+\alpha-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-7)$$

$$E_u(\bullet) = \gamma AK(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma-1}N(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma+\alpha} \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned} E_H(\bullet) &= \gamma AK(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma-1}N(t)^{\gamma}Ha(t)^{\alpha} \\ &= \gamma AK(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}N(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma+\alpha-1} \quad (Ha(t) = H(t)) \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$E_{\phi}(\bullet) = 0 \quad (3-10)$$

$$G(\bullet) = H(t)\xi[1-u(t)] \quad (3-11)$$

$$G_K(\bullet) = 0 \quad (3-12)$$

$$G_u(\bullet) = -H(t)\xi \quad (3-13)$$

$$\dot{G}_u(\bullet) = -\dot{H}(t)\xi \quad (3-14)$$

$$G_H(\bullet) = \xi[1-u(t)] \quad (3-15)$$

$$G_{\phi}(\bullet) = 0 \quad (3-16)$$

(1) 物的資本の成長率  $g_K$

第 2 章で求められた関係式を利用して物的資本の成長率を求める。効用関数は (3-4) 式で与えられているから、(2-6) 式を使用すると (3-17) 式を得る。

$$\theta_1 = U_c = c(t)^{-\sigma} \quad (3-17)$$

また (2-13) 式から、

$$\dot{\theta}_1 = U_{cc} \cdot \dot{c}(t) = -\sigma c(t)^{-\sigma-1} \cdot \dot{c}(t) \quad (3-18)$$

が求まる。さらに (3-17) 式と (3-18) 式から、

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc}}{U_c} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\sigma g_c \quad (3-19)$$

が求まる。今、 $G_\theta(\cdot) = 0$  であり、(2-20) 式を利用すると、対数の括弧内は定数となって、(3-20) 式を得る。

$$\begin{aligned} g_K &= m + g_c - \frac{\frac{d}{dt} \log(\varepsilon \sigma g_c - g_c - \delta)}{\log(\varepsilon \sigma g_c - g_c - \delta)} \\ &= m + g_c \end{aligned} \quad (3-20)$$

ここで、 $\varepsilon = E(\cdot)/(K(t)E_K(\cdot)) = 1/(1-\gamma) > 0$  となって、仮定を満足している。こうして、物的資本の成長率  $g_K$  を求めることができた。

## (2) 消費の成長率 $g_c$

統合化・一般化によって求められた関係式を利用して消費の成長率を求める。つまり、(2-21)' 式を使うと消費の成長率を求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{U_c}{U_{cc} c(t)} &= \frac{c(t)^{-\sigma}}{-\sigma c(t)^{-\sigma-1} \cdot c(t)} = -\frac{1}{\sigma} \\ g_c &= -\sigma^{-1} [\rho - (1-\gamma)AK(t)^{-\gamma}[u(t)N(t)]^\gamma H(t)^{\gamma+\alpha}] \\ &= \sigma^{-1} [(1-\gamma)AK(t)^{-\gamma}[u(t)N(t)]^\gamma H(t)^{\gamma+\alpha} - \rho] \end{aligned} \quad (3-21)$$

となる。ここで持続的成長状態の定義 2 より  $g_c$  は一定率で成長しているから、 $(1-\gamma)AK(t)^{-\gamma}[u(t)N(t)]^\gamma H(t)^{\gamma+\alpha}$  も一定の割合で成長していることになり、この項は資本の限界生産力（実質レンタル率： $r$ ）である。したがって (3-21) 式を以下のように書き改める。

$$g_c = \frac{r - \rho}{\sigma} \quad (3-22)$$

### (3) 人的資本の成長率 $g_H$

さらに、統合化・一般化によって求められた関係式を利用して人的資本の成長率を求める。つまり、(2-23)'式を利用する。従って (3-19) 式 (これは定数) を使うと (2-23)'式に相当する式は以下のように、

$$\frac{\dot{E}_K(\cdot)}{E_K(\cdot)} = 0 \quad (3-23)$$

と簡単に書き改められる。また (3-6) 式と (3-7) 式を (3-23) 式に代入すると以下の式を得る。

$$-\gamma \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \gamma \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + (\gamma + \alpha) \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} = 0$$

ここで、 $\dot{K}(t)/K(t) = m + g_c$ 、 $\dot{N}(t)/N(t) = m$ 、 $\dot{H}(t)/H(t) = g_H$ を上式に代入すれば、(3-24) 式の関係を得る。

$$-\gamma(m + g_c) + \gamma m + (\gamma + \alpha)g_H = 0$$

上式を  $g_c$  について解く。

$$g_c = \frac{\gamma + \alpha}{\gamma} \cdot g_H \quad (3-24)$$

また、準備段階で導出された関連式と (3-19) 式を (2-26) 式に代入すると (3-25) 式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} &= -\sigma g_c + (1 - \gamma) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \gamma \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + (\gamma + \alpha) \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \\ &= -\sigma g_c + (1 - \gamma)(g_c + m) + \gamma m + (\gamma + \alpha)g_H - g_H \\ &= -\sigma g_c + (1 - \gamma)g_c + m + (\gamma + \alpha - 1)g_H \\ &= (1 - \gamma - \sigma)g_c + m + (\gamma + \alpha - 1)g_H \end{aligned} \quad (3-25)$$

ここで、(2-15) 式に従って  $\dot{\theta}_2/\theta_2$  を求めると (3-26) 式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} &= \rho - H(t)\zeta \cdot \frac{\gamma AK(t)^{1-\gamma} u(t)^\gamma N(t)^\gamma H(t)^{\gamma+\alpha-1}}{\gamma AK(t)^{1-\gamma} u(t)^{\gamma-1} N(t)^\gamma H(t)^{\gamma+\alpha}} - \xi[1-u(t)] \\
 &= \rho - \frac{\xi H(t)u(t)}{H(t)} - \xi[1-u(t)] \\
 &= \rho - \xi
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

ここで、(3-25) 式 = (3-26) 式として、(3-24) 式を代入すれば、(3-27) 式を得る。

$$(1-\gamma-\sigma)\frac{\gamma+\alpha}{\gamma} \cdot g_H + m + (\gamma+\alpha-1)g_H = \rho - \xi$$

従って、上式を  $g_H$  について解く。

$$g_H = \frac{\gamma[\xi - (\rho - m)]}{\sigma(\gamma+\alpha) - \alpha} \tag{3-27}$$

こうして持続的成長状態の競争均衡長経路における人的資本の成長率  $g_H$  が求まった。

#### (4) 経済成長率

統合化・一般化の体系のもとで得られた関係式、(2-29) 式、を使って持続的成長状態の経済成長率  $g_Y$  を求めることにする。 $Y(t)$  は以下のように与えられている。

$$Y(t) = AK(t)^{1-\gamma} [u(t)H(t)N(t)]^\gamma Ha(t)^\alpha$$

上式を時間で微分し、上式で割ると経済成長率  $g_Y$  が求まる。

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}(t) &= (1-\gamma)AK(t)^{-\gamma} [u(t)H(t)N(t)]^\gamma Ha(t)^\alpha \dot{K}(t) \\
 &\quad + \gamma AK(t)^{1-\gamma} u(t)^\gamma N(t)^{\gamma-1} H(t)^\gamma Ha(t)^\alpha \dot{N}(t) \\
 &\quad + (\gamma+\alpha)AK(t)^{1-\gamma} u(t)^\gamma N(t)^\gamma H(t)^{\gamma+\alpha-1} \dot{H}(t) \quad (Ha(t)=H(t)) \\
 \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} &= (1-\gamma)\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \gamma\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} + (\gamma+\alpha)\frac{\dot{H}(t)}{H(t)}
 \end{aligned}$$

(3-20) 式および (3-24) 式より  $\dot{K}(t)/K(t) = m + g_c = m + (\gamma+\alpha)g_H/\gamma$ ,  $\dot{N}(t)/N(t) = m$  であり、(3-27) 式より  $g_H = \gamma[\xi - (\rho - m)]/[\sigma(\gamma+\alpha) - \alpha]$  であるから、こ

れを上式に代入し、人口成長率 $m$ を差し引けば、

$$\begin{aligned} g_y &= \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} - m = (1-\gamma) \left[ m + \frac{\gamma+a}{\gamma} \cdot g_H \right] + \gamma m + (\gamma+a) g_H - m \quad (3-28) \\ &= (\gamma+a) \frac{\xi - (\rho - m)}{\sigma(\gamma+a) - a} \end{aligned}$$

となって、持続的成長状態の経済成長率  $g_y$  が求まる。

### 3-2 Rebelo 体系

Lucas 体系と同様に Rebelo 体系の概要を簡単に、そして準備としてここで使用される関連式を述べることにする。

#### モデル

生産に関する技術的状況は以下の式で与えられている。この体系では人口は一定と想定されており、便宜上  $N(t)=1$  とおかれ、外部効果  $Ha(t)$  は考慮されておらず、 $Ha(t)=1$  である。

$$Y(t) = F(K_1(t), Ne^1(t)) = A_1[\phi(t)K(t)]^{1-\gamma}u(t)H(t)^{\gamma} \quad (3-30)$$

$$K_1(t) = \phi(t)K(t)$$

$$Ne^1(t) = u(t)H(t)$$

物的資本蓄積は以下の式で与えられている。

$$\dot{K}(t) = A_1[\phi(t)K(t)]^{1-\gamma}u(t)H(t)^{\gamma} - c(t) - \delta K(t) \quad (3-31)$$

人的資本蓄積は以下の式で与えられている。

$$\dot{H}(t) = G(K_2(t), Ne^2(t))$$

$$= A_2[K(t)(1-\phi(t))^{1-\beta}[(1-L-u(t)H(t))^{\beta} - \delta H(t)] \quad (3-32)$$

$$K_2(t) = K(t)(1-\phi(t))$$

$$Ne^2(t) = (1-L-u(t))H(t)$$

効用関数 (U) は以下の式で与えられている。

$$U=U(c)=\frac{c(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (3-33)$$

準備 (関連式の導出)

$$E(\bullet)=A_1[K(t)\phi(t)]^{1-\gamma}u(t)H(t)^{\gamma} \quad (3-34)$$

$$E_K(\bullet)=(1-\gamma)A_1\phi(t)^{1-\gamma}K(t)^{-\gamma}u(t)H(t)^{\gamma} \quad (3-35)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_K(\bullet) &= -\gamma(1-\gamma)A_1\phi(t)^{1-\gamma}K(t)^{-\gamma-1}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma}\dot{K}(t) \\ &\quad + \gamma(1-\gamma)A_1\phi(t)^{1-\gamma}K(t)^{-\gamma}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-36)$$

$$E_u(\bullet)=\gamma A_1[\phi(t)K(t)]^{1-\gamma}u(t)^{-1}H(t)^{\gamma} \quad (3-37)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_u(\bullet) &= \gamma(1-\gamma)A_1\phi(t)^{1-\gamma}K(t)^{-\gamma}u(t)^{-1}H(t)^{\gamma}\dot{K}(t) \\ &\quad + \gamma^2 A_1[\phi(t)K(t)]^{1-\gamma}u(t)^{-1}H(t)^{\gamma-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$E_{\phi}(\bullet)=(1-\gamma)A_1\phi(t)^{-\gamma}K(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma} \quad (3-39)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\phi}(\bullet) &= (1-\gamma)^2 A_1\phi(t)^{-\gamma}K(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma}\dot{K}(t) \\ &\quad + \gamma(1-\gamma)A_1\phi(t)^{-\gamma}K(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-40)$$

$$E_H(\bullet)=\gamma A_1K(t)^{1-\gamma}\phi(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma}H(t)^{\gamma-1} \quad (3-41)$$

$$G(\bullet)=A_2[K(t)(1-\phi(t))]^{1-\beta}[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta} \quad (3-42)$$

$$G_K(\bullet)=(1-\beta)A_2[K(t)(1-\phi(t))]^{1-\beta}(1-\phi(t))[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta} \quad (3-43)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_K(\bullet) &= -\beta(1-\beta)A_2K(t)^{-\beta-1}[1-\phi(t)]^{1-\beta} \\ &\quad \times [(1-L-u(t))H(t)]^{\beta}\dot{K}(t) + \beta(1-\beta)A_2K(t)^{-\beta} \\ &\quad \times [1-\phi(t)]^{1-\beta}(1-L-u(t))^{\beta}H(t)^{\beta-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-44)$$

$$G_u(\bullet)=-\beta A_2[K(t)(1-\phi(t))]^{1-\beta}[(1-L-u(t))]^{\beta-1}H(t)^{\beta} \quad (3-45)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_u(\bullet) &= -\beta(1-\beta)A_2K(t)^{-\beta}(1-\phi(t))^{1-\beta}[(1-L-u(t))]^{\beta-1}H(t)^{\beta}\dot{K}(t) - \beta^2 A_2 \\ &\quad \times [K(t)(1-\phi(t))]^{1-\beta}[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-46)$$

$$G_{\phi}(\bullet)=-(1-\beta)A_2K(t)^{1-\beta}[(1-\phi(t))]^{\beta}[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta} \quad (3-47)$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_{\phi}(\bullet) &= -(1-\beta)^2 A_2K(t)^{-\beta}[1-\phi(t)]^{\beta} \\ &\quad \times [(1-L-u(t))H(t)]^{\beta}\dot{K}(t) - \beta(1-\beta)A_2K(t)^{-\beta-1} \\ &\quad \times [1-\phi(t)]^{\beta}[1-L-u(t)]^{\beta}H(t)^{\beta-1}\dot{H}(t) \end{aligned} \quad (3-48)$$

$$G_H(\bullet)=\beta A_2[K(t)(1-\phi(t))]^{1-\beta}(1-L-u(t))^{\beta}H(t)^{\beta-1} \quad (3-49)$$

(1) 物的資本の成長率  $g_k$

一般的な体系のもとで得られた関係式を利用して物的資本の成長率を以下のようにして求める。効用関数は (3-33) 式で与えられているから、Lucas 体系と同様な手続きを経ると (3-50) 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{U_{cc} \dot{c}(t)}{U_c} = -\sigma g_c \quad (3-50)$$

(2-20) 式を利用して、(3-50) 式および (3-51) 式を代入すると (3-52) 式のように物的資本の成長率  $g_k$  が求まる。

$$\begin{aligned} \frac{E_\phi(\cdot)G_k(\cdot)}{G_\phi(\cdot)} &= (\gamma-1)A_1\{[\phi(t)K(t)]/[u(t)H(t)]\}^{-\sigma}(1-\phi(t)) \\ &= (\gamma-1)A_1\tilde{k}^{-\gamma}(1-\phi(t)) \end{aligned} \quad (3-51)$$

$$\tilde{k} = \frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} : \text{効率単位当りの物的資本比率}$$

持続的成長状態であれば、 $\tilde{k}$  および  $\phi(t)$  は一定であるから、 $E_\phi(\cdot)G_k(\cdot)/G_\phi(\cdot)$  も一定となる<sup>1)</sup>。従って (2-20) 式の  $\log \{ \}$  は定数項となり、 $d/dt(\log \{ \}) = 0$  となり、Rebelo 体系では人口成長率は考慮していないから、

$$g_k = g_c \quad (3-52)$$

という関係式を得る。尚、 $\varepsilon = 1/(1-\gamma) > 0$  である。(3-52) 式では資本の成長率はまだ求まっていないが、消費の成長率から資本の成長率は決定することになる。

(2) 消費の成長率  $g_c$

次に (2-21) 式を使って消費の成長率  $g_c$  を求めることにする。(3-50) 式を変形したものと、(3-51) 式および関連式を (2-21) 式に代入すると (3-53) 式を得る。

$$g_c = -\frac{1}{\sigma} \cdot \left\{ \rho - (\gamma-1)A_1 \left[ \frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} \right]^{-\gamma} + \delta \right\} \quad (3-53)$$

ここで  $(1-\gamma)A_1\{[\phi(t)K(t)]/[u(t)H(t)]\}^{-\gamma}-\delta$  は物的資本の限界生産力

(実質レンタル率:  $r$ ) であり、持続的成長状態では一定であるから、上式を書き改めると

$$g_c = \frac{r - \rho}{\sigma} \quad (3-54)$$

となり、 $g_K = g_c = (r - \rho) / \sigma$  が成立し、資本の成長率と消費の成長率が導出された。

### (3) 人的資本の成長率

ここでは、一般的な体系のもとで得られた関係式を使って、人的資本の成長率を求めることにする。まず、(3-50) 式および準備段階で導出された関連式を (2-23) 式に代入する。計算が複雑なので簡単に述べると、(2-23) 式の左辺の { } は定数 ( $-\sigma g_c - \rho - \delta$ ) となって左辺はゼロとなる。従って、(2-23) 式に相当する式は (3-55) 式ようになる。

$$0 = (1 - \phi(t))^2 [(\beta - \gamma)g_K - (\beta - \gamma)g_H] + \beta(g_H - g_K) - \gamma\phi(t)(1 - \phi(t))(g_K - g_H) \quad (3-55)$$

(3-55) 式を整理すると、以下の関係式を得る。

$$g_H = g_K \quad (3-56)$$

ここで (2-15) 式を使って  $\dot{\theta}_2 / \theta_2$  を求めると、

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - r \quad (3-57)$$

が求まる<sup>2)</sup>。ただし、 $r$  は持続的成長状態における実質利子率で、

$$r = \Psi A_1^\nu A_2^{1-\nu} (1-L)^{1-\nu} \delta \quad (3-58)$$

であり<sup>3)</sup>、 $\nu = (1 - \beta) / (1 - \beta + \gamma)$ 、 $\Psi$  は  $\gamma$  と  $\beta$  の強いプラスの関数である。さらに (2-26) 式に (3-50) 式と準備段階で導出された関連式を代入し、 $g_K = g_c$  とし、 $\dot{\theta}_2 / \theta_2$  を求めると (3-59) 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = (\beta - \sigma - \gamma)g_c - (\beta - \gamma)g_h \quad (3-59)$$

ここで (3-57) 式 = (3-59) 式とし, (3-56) 式と (3-52) 式から  $g_c = g_H$  を代入すると,

$$g_H = \frac{r - \rho}{\sigma} \quad (3-60)$$

となって, 人的資本の成長率が求まり, (3-54) 式と等しくなることが確認できた。

#### (4) 経済成長率

さらに関係式, (2-29) 式, を使って持続的成長状態の経済成長率  $g_y$  を求めることにする。Y(t) は以下のように与えられている。

$$Y(t) = A_1 [\phi(t) K(t)]^{1-\gamma} [u(t) H(t)]^\gamma \quad (3-61)$$

(3-61) 式を時間で微分し, 同じ式で割ると経済成長率が求まる。

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= (1-\gamma) A_1 \phi(t)^{1-\gamma} K(t)^{-\gamma} [u(t) H(t)]^\gamma \dot{K}(t) \\ &\quad + \gamma A_1 [\phi(t) K(t)]^{1-\gamma} u(t)^\gamma H(t)^{\gamma-1} \dot{H}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} &= (1-\gamma) \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \gamma \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \\ &= (1-\gamma) g_K + \gamma g_H \end{aligned}$$

今,  $g_K = g_H$  であるから, 結局,

$$g_y = g_K = g_H = g_c \quad (3-62)$$

という関係式が得られる。ここで, 持続的成長状態の実質利子率  $r$  は (3-58) 式で与えられているから, 経済成長率  $g_y$  は以下のように表される。

$$g_y = \frac{\Psi A_1^\nu A_2^{1-\nu} (1-L)^{1-\nu} - \delta - \rho}{\sigma} \quad (3-63)$$

以上のように, 第2章で得られた一般的体系のもとでの関係式を使って各成長率を求めたが, Lucas および Rebelo が導出した成長率と一致することが証明できた。

### 第3章の注

- 1) Rebelo [1991] の論文より持続的成長状態での効率単位当りの資本比率を計算すると、

$$\frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} = \beta^{-\frac{\beta}{1-\beta+\gamma}} (1-\beta)^{-\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}} \gamma^{-\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}} (1-\gamma)^{\frac{2-\beta}{1-\beta+\gamma}} \cdot \\ A_1^{-\frac{1}{1-\beta+\gamma}} A_2^{-\frac{1}{1-\beta+\gamma}} (1-L)^{-\frac{1}{1-\beta+\gamma}}$$

となって、効率単位当りの資本比率が一定であることを証明できる (APPENDIX-I を参照のこと)。

- 2) 求め方は、APPENDIX-I を参照のこと  
3) 求め方は、APPENDIX-I を参照のこと

### 3-3 統合化・一般化についての考察

ここで Lucas 体系と Rebelo 体系の統合化・一般化により明確になったことは、Lucas 体系において、 $m=0$ 、 $A_2=\xi$ 、 $\alpha=0$ 、と置き、物的資本の割り振り率  $0 < \phi(t) < 1$  および余暇時間の割合  $L$  を考慮したものが Rebelo 体系であることは明白である。従ってこの条件を Rebelo 体系に置き換えれば、各成長率が Lucas 体系と一致することが確認される。そこで両体系の各成長率を比較すると、いま Rebelo 体系では人口成長率  $m$  がゼロであったから、両体系間で差異を生じるのは、人的資本の成長率と経済成長率であることがわかる。これは外部効果  $Ha(t)$  の存在が大きな要因であるためであるが、人的資本の外部効果が大きくなるほど Lucas 体系の人的資本の成長率と経済成長率は大きくなる。Rebelo 体系では、経済成長率を高めるためには、実質利子率  $r$  を大きくすればよく、さらにそのためには、ここでは詳述できないが  $\gamma$  をパラメータとしてシュミレーションした結果  $\gamma$  を大きくすれば良いことが分かった。

## 4. 結 語

本稿で得られた結果は経済発展、特に発展途上国の経済発展を考える際に、多くの示唆を含んでいると思われる。特に Household-producer の仮定は先進国よりも発展途上国に適していると思われる。なぜなら発展途上国では消費

者と生産者の分離がそれほど進んでいないからである。また本稿で設定された一般的な体系のもとで得られた関係式は、Lucas および Rebelo によって展開されたコブ＝ダグラス型生産関数に限定されず、CES 型関数でも妥当するものである。そのためには (2-18)' 式の  $\varepsilon > 0$  が満足されなければならないが、いま、 $Y(t) = A[(1-\gamma)K(t)]^\gamma + \gamma Ne(t)^{\gamma-1/\rho} Ha(t)^\rho$  とすれば、 $\varepsilon = [(1-\gamma) + \gamma(K(t)/Ne(t))^\rho]/(1-\gamma) > 0$  が成立し、CES 型関数であっても本稿で得られた一般的な帰結が適用可能である。この CES 型関数の導入の可能性は幅広い分析が可能であることを示しており、分析対象国の国情に応じた生産関数が導入できることになる。また本稿では紙数の関係で述べるができなかったが、本稿での展開以外にも、Lucas 体系と Rebelo 体系の賃金に関する相互関係と国際労働移動の分析、およびデータによる部分的な実証分析も行った。今後の課題として、CES 型関数による各成長率の導出および裏付けされたデータによる実証分析が残されている。

## APPENDIX-I

Rebelo 体系にて使用される準備段階での関連式は (3-34)―(3-49) 式を利用する。まず、(2-16) 式を使うと、(A1-1) 式を得る。

$$\frac{(1-\gamma)A_1\phi(t)^{-\gamma}K(t)^{1-\gamma}[u(t)H(t)]^\gamma}{\gamma A_1\phi(t)^{1-\gamma}K(t)^{1-\gamma}u(t)^{\gamma-1}H(t)^\gamma} = \frac{(1-\beta)A_2K(t)^{1-\beta}[1-\phi(t)]^{-\beta}[(1-L-u(t)H(t))]^\beta}{\beta A_2(K(t)(1-\phi(t))^{1-\beta}(1-L-u(t))^\beta H(t)^\beta)}$$

従って、これを整理すると (A1-1) 式を得る。

$$\frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} = \frac{\beta(1-\gamma)}{\gamma(1-\beta)} \left[ \frac{(1-\phi(t))K(t)}{(1-L-u(t))H(t)} \right] \quad (A1-1)$$

また (2-14) 式を使うと、(A1-2) 式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} &= \rho - (1-\gamma)A_1\phi(t)^{1-\gamma}K(t)^{-\gamma}[u(t)H(t)]^{\gamma} + \delta \\ &\quad - \frac{(1-\beta)A_2K(t)^{-\beta}(1-\phi(t))^{1-\beta}[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta}}{(1-\beta)A_2K(t)^{1-\beta}(1-\phi(t))^{1-\beta}[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta}} \cdot \\ &\quad (1-\gamma)A_1\phi(t)^{-\gamma}K(t)^{1-\gamma}[u(t)H(t)]^{\gamma} \\ &= \rho - (1-\gamma)A_1\phi(t)^{-\gamma}K(t)^{-\gamma}[u(t)H(t)]^{\gamma} + \delta \end{aligned} \quad (A1-2)$$

さらに (2-15) 式を使うと, (A1-3) 式を得る。

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \beta A_2[K(t)(1-\phi(t))]^{1-\beta}[(1-L-u(t))H(t)]^{\beta-1}(1-L) + \delta \quad (A1-3)$$

持続的成長状態では,  $\dot{\theta}_1/\theta_1 = \dot{\theta}_2/\theta_2$  が成立するから, (A1-2) 式 = (A1-3) 式とすると, (A1-4) 式を得る。

$$\frac{[1-\phi(t)]K(t)}{[1-L-u(t)]H(t)} = \left[ \frac{(1-\gamma)A_1}{\beta A_2(1-L)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left[ \frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} \right]^{-\frac{\gamma}{1-\beta}} \quad (A1-4)$$

ここで (A1-1) を変形すると, (A1-1)' 式となる。

$$\frac{[1-\phi(t)]K(t)}{[1-L-u(t)]H(t)} = \frac{\gamma(1-\beta)}{\beta(1-\gamma)} \cdot \left[ \frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} \right] \quad (A1-1)'$$

(A1-4) 式を (A1-1)' に代入すると (A1-5) 式が求まり,

$$\begin{aligned} \frac{\phi(t)K(t)}{u(t)H(t)} &= \beta^{-\frac{\beta}{1-\beta+\gamma}} \cdot (1-\beta)^{-\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}} \cdot \gamma^{-\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}} \cdot (1-\gamma)^{\frac{2-\beta}{1-\beta+\gamma}} \cdot A_1^{\frac{1}{1-\beta+\gamma}} \cdot \\ &\quad A_2^{\frac{1}{1-\beta+\gamma}} \cdot (1-L)^{-\frac{1}{1-\beta+\gamma}} \end{aligned} \quad (A1-5)$$

持続的成長状態での効率単位の資本比率  $\bar{k}$  (一定) が求まる。ここで, 持続的成長状態の実質利子率 ( $r$ ) を (A1-6) 式のように定義する。

$$r = (1-\gamma)A_1[\phi(t)K(t)]^{\gamma}[u(t)H(t)]^{\gamma} - \delta \quad (A1-6)$$

この (A1-6) 式に (A1-5) 式を代入すると (A1-7) 式を得る。

$$\begin{aligned} r &= (1-\gamma)^{\frac{1-\beta-\gamma+\beta\gamma}{1-\beta+\gamma}} \cdot \beta^{\frac{\beta\gamma}{1-\beta+\gamma}} \cdot \gamma(1-\beta)^{\frac{\gamma(1-\beta)}{1-\beta+\gamma}} \cdot A_1^{\frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}} \cdot A_2^{\frac{\gamma}{1-\beta+\gamma}} \cdot \\ &\quad (1-L)^{\frac{\gamma}{1-\beta+\gamma}} - \delta \end{aligned}$$

ここで,

$$\Psi = (1-\gamma)^{\frac{1-\beta-\gamma+\beta\gamma}{1-\beta+\gamma}} \cdot \beta^{\frac{\beta\gamma}{1-\beta+\gamma}} \cdot \gamma(1-\beta)^{\frac{\gamma(1-\beta)}{1-\beta+\gamma}}$$

$$\nu = \frac{1-\beta}{1-\beta+\gamma}$$

とおくと,

$$r = \Psi A_1^\nu A_2^{1-\nu} (1-L)^{1-\nu} \delta \quad (\text{A1-7})$$

となる。また持続的成長では物的資本の実質利子率と人的資本の実質収益率は等しくなければならないから、(A1-8) 式が成立している。

$$\frac{\dot{\theta}_1}{\theta_1} = \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} = \rho - \gamma \quad (\text{A1-8})$$

### 【参 考 文 献】

- [1] Azariadis, C. and Drazen, A., "Threshold Externalities in Economic Development", *Quarterly Journal of Economics*, 55, (1990), 501-526.
- [2] Barro, R. J., "Government Spending in a Simple Model of Endogeneous Growth", *Journal of Political Economy*, 98, (1990), S103-124.
- [3] Barro, R. J., and Sala-i-Martin, X., "Public Finance in Models of Economic Growth", *Review of Economic Studies*, 59, (1992), 645-661.
- [4] Baumol, W. J., "Productivity Growth, Convergence, and Welfare—What the Long-Run Data Show", *American Economic Review*, 76, (1986), 1072-1085.
- [5] Blanchard, O. J. and Fischer, S., *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, (1992).
- [6] Denison, E. F., *The Sources of Economic Growth in the United States and the Alternatives Before Us*, Committee for Economic Development, (1961).
- [7] Lucas, R. E. Jr., "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22, (1988), 3-42.
- [8] Lucas, R. E. Jr., "Why Doesn't Capital Flow from Rich to Poor Countries?", *American Economic Review*, 80, (1990), 92-96.
- [9] Rebelo, S., "Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, 99, (1991), 500-520.
- [10] Schultz, T. W., "Investment in Human Capital", *American Economic*

- Review*, 51, (1961), 1-17.
- [11] Sala-i-Martin, X., "Lecture Notes on Economic Growth (I): Introduction to the Literature And Neoclassical Models", NBER Working Paper No. 3563, (1990).
  - [12] Sala-i-Martin, X., "Lecture Notes on Economic Growth (II): Five Prototype Models of Endogeneous Growth", NBER Working Paper No. 3564, (1990).
  - [13] Solow, R. M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 79, (1956), 65-94.
  - [14] Stern, N., "The Economics of Development: A Survey", *Economic Journal*, 99, (1989), 597-685.
  - [15] Swan, T., "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, 32, (1956), 334-361.
  - [16] Wolff, E. N., "Capital Formation and Productivity Convergence over Long Term", *American Economic Review*, 81, (1991), 566-579.
  - [17] 大住圭介, 「人的資本と經濟發展 "Uzawa-Lucas 体系の検討"」『青山經濟論集』, (1991), 第42卷第1・2号。
  - [18] 大住圭介, 『長期經濟計画の理論的研究』, 勁草書房, (1985)。