

拡散数値シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発とその応用

大串, 浩一郎

<https://doi.org/10.11501/3090249>

出版情報：九州大学, 1992, 博士（工学）, 論文博士
バージョン：
権利関係：



拡散数値シミュレーションにおける移流輸送の
高精度計算法の開発とその応用

平成 4 年 2 月

大 串 浩 一 郎

拡散数値シミュレーションにおける
 移流輸送の高精度計算法の開発と
 その応用

平成 4 年 2 月

大串 浩一郎

目 次

第 1 章	序 論	1
1. 1	拡散数値シミュレーションとその応用	1
1. 2	従来の研究	3
1. 2. 1	移流方程式の数値解法	3
1. 2. 2	拡散係数・分散係数の推定について	5
1. 3	本論文の目的と各章の構成	7
第 2 章	移流の高精度計算法の開発	9
2. 1	緒言	9
2. 2	移流項の計算法	10
2. 2. 1	移流拡散方程式	10
2. 2. 2	拡散方程式の数値計算法	11
2. 3	Six-pointスキームの開発	21
2. 3. 1	はじめに	21
2. 3. 2	Six-pointスキームの誘導	22
2. 3. 3	モデル計算と評価	27
2. 3. 4	1次元及び2次元問題における境界条件	32
2. 3. 5	Six-pointスキームの拡張応用	40
2. 3. 6	まとめ	48

2. 4	改良型Six-pointスキームの開発	49
2.4.1	はじめに	49
2.4.2	多次元問題における誤差の蓄積	50
2.4.3	改良型Six-pointスキームの誘導	52
2.4.4	まとめ	58
2. 5	SOWMACスキームの開発	59
2.5.1	はじめに	59
2.5.2	SOWMACスキームの誘導	60
2.5.3	モデル計算によるSOWMACスキームの検証	73
2.5.4	まとめ	84
2. 6	結言	85
第3章	水域における拡散問題への応用	86
3. 1	緒言	86
3. 2	瀬戸内海における物質の分散係数の推定	89
3.2.1	はじめに	89
3.2.2	瀬戸内海の自然条件	90
3.2.3	1次元拡散の数値計算	94
3.2.4	まとめ	103
3. 3	内湾における潮流と物質拡散のシミュレーション	104
3.3.1	はじめに	104
3.3.2	潮流と物質拡散のシミュレーション	105
3.3.3	比例定数 β_0 の値の決定	107
3.3.4	まとめ	112

3. 4	結言	113
第4章	非線型計算への拡張	114
4. 1	緒言	114
4. 2	1次元Burger's方程式に対する高精度数値計算スキームの開発	115
4.2.1	Six-pointスキームの非線型移流計算への拡張	115
4.2.2	衝撃波のモデル計算例	117
4. 3	非線型移流項の卓越した流れの計算への適用	120
4.3.1	非定常1次元開水路流れの数値計算法	120
4.3.2	段波のモデル計算例	123
4. 4	結言	125
第5章	結論	126
	謝辞	128
	参考文献	129

第 1 章

序 論

1. 1 拡散数値シミュレーションとその応用

21世紀を目前に控え、地球環境問題に真剣に取り組む必要に迫られている今日、我々を取りまく大気や大地、海洋への関心はますます高まっている。人間社会から自然に与えるインパクトの予測、また逆に自然からもたらされる我々の生活への影響(自然災害も含めて)を推し量ることは極めて重要な課題となってくる。環境の変化をいかに的確に予測するかはその予報・予測の手法、システムに大きく依存する。

今世紀初頭、Richardsonはヨーロッパの一地域の天気を数値的に予報することを試みた。その結果は現実とは程遠かったが、この試みが数値シミュレーションの始まりであると言われている。シミュレーション(模擬実験)には、アナログ・シミュレーションとデジタル・シミュレーションがある。模型を用いた室内実験などはアナログ・シミュレーションとして昔からよく行われていた手法である。現象を規定する基礎方程式を数値的に解くデジタル・シミュレーションは、近年における計算機のめざましい発達によって急速に脚光を浴びてきたもので、これまで不可能とされていた複雑な現象の再現が可能になりつつある。

しかしながら、数値シミュレーションから信頼できる結果を得るためには、実際の現象を良く把握した上で適切なモデル化を行うことはもちろん、計算で用いられるパラメータは現場実測からできるだけ正確に決める必要がある。

室内実験や現場実測また数値シミュレーションにはそれぞれ一長一短があると思われるので、これらの手法をお互い密接に関連させて補い合うようにしなければならない。

自然界の諸現象は偏微分方程式で記述されることが多いが、特に移流拡散方程式は、大気中や地中、海中などの流体中におけるさまざまな物理量(質量・熱・物質濃度・エネルギー・渦度等)の輸送を表す基礎方程式であり、この方程式を解くことにより自然界のさまざまな拡散・分散現象の予測が可能となる。例えば、排煙による大気汚染予測、埋立廃棄物による地下水の汚染予測、湖沼の富栄養化や湾内水質浄化の予測等を行うことができる。

本論文では、水域における物質の拡散数値シミュレーションを中心に扱う。拡散される物質は流れに影響を与えないpassiveな物質に限定している。ただし、後の章の応用例では濃度以外に流速そのものを従属変数とした非線型問題についても言及する。

密度差を持たない拡散物質の河川や沿岸部における拡散問題を取り扱うときは、平均流による輸送と移流分散・乱流拡散という数学的にも物理的にも性質の異なる2種類の輸送形式を含む偏微分方程式(移流拡散方程式)を解かなければならない。従来よりこの移流拡散問題を数値的に取り扱う際には以下のような問題点があった。

- (1) 方程式中の移流項が卓越するとき、つまり流れが比較的速い場合などは、数値誤差が顕著に現れ十分な精度の拡散予測はできなかった。
- (2) 方程式中の拡散係数・分散係数は未知であり、実際の現象をうまく再現できるような係数の与え方が容易ではなかった。

以上の問題が解決されない限り、水域における高精度の物質拡散シミュレーションは望めないことになる。

1. 2 従来の研究

ここで、移流拡散方程式の数値解法と拡散係数・分散係数に関するこれまでの研究を簡単に振り返ってみる。

1.2.1 移流方程式の数値解法

移流拡散方程式を数値的に解く方法は、差分法(FDM)、有限要素法(FEM)、境界要素法(BEM)の3つに大きく分類される。そのうち差分法の歴史は最も古く、さまざまな計算法が提案された。ここでは、精度の高い数値計算が難しいとされる移流項に焦点を絞り各種の差分法について述べる。

最初に、簡単な差分スキームとしては、1次精度風上差分スキーム、Lax-Wendroffスキーム(Lax-Wendroff(1960))、Leapfrogスキームが挙げられる。これらの計算法を用いるのは容易であるが、後に示すように計算結果に無視できない数値誤差が引き起こされるスキームである。なおLax-Wendroffスキームは流速一定のときはLeithスキーム(Leith(1965))と等価となる。

次に、Bella-Dobbins(1968)は1次精度風上差分スキームの数値拡散項に着目し、第2章で述べるスプリット・オペレーター・アプローチにおける拡散の計算の際、その数値拡散項を差し引く計算法を示している。しかし、2次の誤差項のみを差し引いてもあまり精度の良い計算結果は得られなかった。

Fromm(1968)は、移流方程式の計算における位相誤差に着目し、進み位相誤差をもつスキームと遅れ位相誤差をもつスキームを平均し位相誤差をゼロにするような計算法を与えた。このスキームにより位相誤差や負の濃度の大きさは減少したが、依然としてダンピング(数値拡散による濃度の低下)は大きかった。

Leendertse(1970)は、陰形式(implicit scheme)と陽形式(explicit scheme)

の中央差分を2段階に分けて用いて数値振動を抑える工夫を行った。しかし、濃度勾配が急な場合はやはり数値分散による誤差が生じていた。

Martinのスキーム (Martin(1975)) は、厳密解と計算解のモーメントをある次数まで等しくすることによって得られたスキームである。それらのうち、2次、4次の精度のスキームは振動と位相誤差を生じるが、3次精度のスキームはダンピングはあるものの位相誤差は小さかった。

さらに次数を高めたものとしてRoache(1972)は空間4次精度、時間2次精度のスキームを提案し、Forester(1977)は空間8次精度の計算スキームを考案しているが、それらは次数を上げるごとに多くの格子点を用いることになるため境界での取り扱いが煩雑であったり、勾配の急な濃度分布のとき振動を引き起こしていた。

また、高次の風上差分の中で奇数次(3次、5次等)のスキームには濃度分布の勾配が急な場合に、振動は狭い範囲でのみ起こり、誤差は拡がらないという性質があることが明らかとなっている。この特性を利用して特に3次の風上差分を用いた河村スキーム、QUICKスキーム、QUICKESTスキーム (Leonard(1979)) 等が提案されており、非線型移流項に対して有力な手法と見られている。しかし、後に示すように線形の移流計算において位相誤差が見られる。

Boris-Book(1973)は、負の拡散を利用して数値分散による振動をなくそうとしたFCTスキームを開発したが、数値拡散を引き起こした。

Holly-Preissmann(1977)は、3次のHermite内挿多項式を用いて高精度のTwo-point fourth-order methodを開発した。しかし、このスキームは濃度だけでなく濃度勾配も移流する必要があるため、2次元問題への拡張が難しかった。

以上、移流拡散方程式の数値計算法としてさまざまな計算スキームが提案されてきたが、決定版といえるものは見当たらずまだ多くの問題が残されていると言えよう。

1.2.2 拡散係数・分散係数の推定について

拡散方程式を精度良く解くための条件として、流れの場の拡散能を表す拡散係数もしくは分散係数の正確な見積もりが不可欠である。分散(dispersion)とは、水理量の断面平均量からの偏差によって生じる見かけの大きな拡散のことである。1次元流れにおける流れ方向の分散係数は縦分散係数と呼ばれ、通常の乱流拡散係数と比較して1桁から2桁位大きい。

分散係数について最初に理論的な記述を与えたのはTaylor(1954)である。彼は、円管内の乱流に対する理論的な縦分散係数の評価を行った。2次元的な開水路流れにおける分散の理論はElder(1959)により研究された。彼は、縦分散係数だけでなく、それと直角方向の拡散係数も求めている。

さて、実際の流れ場における拡散・分散係数について見ると、河川中流部、河口部、内海・内湾、外海それぞれにおいて、混合現象を支配する要因として流れだけでなく他のいろいろな要因も関連してくる。例えば、河川において水深に比べ川幅が非常に大きいときには、物理量は水深方向には近似的に一様と見なせるが、その川幅方向(横方向)の偏差は無視できず重要な役割を果たすようになる。Fischer(1967)は、流下方向の移流と横方向の拡散の効果を考慮して河川における縦分散係数を与えている。

河口部などの感潮域では、潮汐による往復流や密度成層による浮力効果が分散係数に対して大きな影響をもってくる。Holley-Harleman-Fischer(1970)は潮汐による往復流がある場合の縦分散係数が往復流のない場合に比べてどの程度減少するかを、2次元水路で流速分布が直線の場合について求めている。密度成層化した河口部における重力循環流はHansen-Rattray(1965)やFischer(1972)により研究され、縦分散係数への寄与率がFischerにより与えられている。

内海・内湾においては、従来より多くの場合海域を1次元モデル、もしくは

2次元モデルと見なして取り扱ってきた。Euler的時間スケール $T_E = b^2/K$ (b は水路の半幅、 K は横方向の拡散係数)より長い期間を対象とする混合現象に対しては1次元モデルが適用できる。それより短い期間の混合現象を対象とする場合は2次元モデルを用いる必要がある。瀬戸内海における1次元モデルによる解析としては、速水・宇野木(1970)や玉井・早川(1975)の研究がある。速水・宇野木は年平均塩素量を用いて定常1次元解析により瀬戸内海全体の縦分散係数として一定値の 1.0×10^7 (cm^2/s)を得た。玉井・早川は潮汐残差流モデルを用いて瀬戸内海全体の平均的な縦分散係数として 5.0×10^7 (cm^2/s)を得た。2次元モデルでは、水理模型実験と数値解析結果の比較検討から拡散係数を決めた樋口・柳・柏井(1974)、金子・堀江・村上(1974)の研究がある。和田・片野(1971)、和田・角湯(1974)は流速変動の定点観測を行い、得られた自己相関係数よりTaylorの定理(Taylor(1921))を用いて拡散係数を求めている。

外海での混合現象では潮流の影響はほとんどなく、不規則な乱れが現象を支配する。水平拡散係数については、Orlob(1959)がRichardsonの4/3乗則の比例定数0.01を与えた。また、円形パッチ理論による解析では、拡散速度をパラメータとして扱ったJoseph-Sendner(1958)やエネルギー散逸率をパラメータとして用いたOzmidov(1958)の研究がある。

以上のように河川中流部、河口部、内海・内湾、外海とそれぞれ混合現象を支配する要因が異なるため、基礎的な理論だけで拡散係数・分散係数の統一的な評価を行うことはできない。したがって濃度分布の計算結果を実測結果にfittingさせることによる拡散係数・分散係数の評価法が有力な手法となってくるが、前述のように移流項の計算に大きな数値誤差が含まれていることから、この方法による拡散係数の正確な評価は容易ではない。この面からも移流輸送に関する高精度計算スキームの開発が強く望まれている。

1. 3 本論文の目的と各章の構成

前節で述べたように、従来より高精度の拡散数値シミュレーションを行うため、数値計算スキームの開発、拡散係数・分散係数の評価法・推定法の開発が数多く試みられてきた。しかしながら、高精度で多次元問題への拡張も容易な計算スキームはほとんど見当たらず、また、拡散シミュレーションの良し悪しを本質的に左右する拡散係数や分散係数の評価の仕方にも統一的なものは見当たらない。

本論文の目的は2つに大別される。

まず、最初に、高精度移流輸送計算法の開発を行う。移流拡散方程式における移流項と拡散項のうち、高い精度の計算が難しいとされている移流項に焦点をあててスキームの開発を行う。そのための手法として第2章で述べるスプリット・オペレーター・アプローチを採用し、1次元で高い精度を得たHermiteの内挿多項式によるスキーム(Holly-Preissmann(1977))を改良して多次元へ容易に拡張できる計算法や全く新しい概念に基づいた高精度計算法を開発する。

次に、水域における拡散係数・分散係数の簡単な評価法の確立を試みる。新しく開発された計算法を用いて、対象を潮汐の影響が支配的な内湾・内海に限り、統一的な拡散係数・分散係数の評価法を検討する。それらを1次元モデル、2次元モデルに分け、それぞれに対して普遍的な拡散係数・分散係数の算出方法を開発する。

本論文は、以下の4章から構成されている。

第1章は序論であり、水域における拡散数値シミュレーションを行う場合の問題点ならびに従来の研究と現状を概観し、本論文の目的と各章の構成についての概要を述べる。

第2章においては、拡散方程式における移流項の高精度数値計算スキームの

開発について詳述する。これまでに提案されている移流項の計算法とその数値誤差について述べ、それらの問題点を解決するためスプリット・オペレーター・アプローチにおける純粹移流方程式の計算法として特性曲線法に基づいた高精度のSix-pointスキームを新たに開発する。そして、このスキームの多次元への拡張性、境界付近の取り扱い方、合流河川における適用法等について述べる。続いて、このスキームが2次元、3次元問題でも同様な精度を保つように負の拡散特性をもつ修正項を考慮した改良型Six-pointスキームを提案する。最後に、上述の2つのスキームとは全く異なる、1階の移流方程式の代わりに2階の波動方程式を解くという新しい概念に基づいたSOWMAC法を開発・提案する。

第3章では、第2章で開発・提案した新しいスキームであるSix-pointスキームを水域における拡散シミュレーションの問題へ応用する。瀬戸内海の1次元モデルにおいて縦分散係数の推定法を検討し、1次元非定常拡散数値シミュレーションを行う。続いて、博多湾、有明海、鹿児島湾の2次元モデルにおける渦動拡散係数を流れの情報を用いて空間的に求め、Six-pointスキームを用いた拡散シミュレーションを行うことで、普遍的な渦動拡散係数の評価法を開発する。これらはいずれも高精度の移流輸送計算法が確立されて初めて可能となったものである。

第4章では、移流拡散方程式の特別な場合として、従属変数が流速の場合、すなわち、非線型移流問題に対するSix-pointスキームの拡張応用について検討する。

第5章は、本論文の結論であり、各章の内容を総括するとともに今後の課題などについて述べる。

第 2 章

移流の高精度計算法の開発

2. 1 緒言

自然の河川や湖沼、海洋等の水質変化を予測するためには、コンピューターを用いて流れと物質輸送の両方を数値的に解かなければならない。輸送される物質が流れに影響を及ぼさない passive な場合は、流れ場の計算後に移流拡散方程式を解くことにより拡散のシミュレーションが行われる。この移流拡散方程式は、平均流による輸送すなわち移流と、乱流拡散(もしくは移流分散)という全く異なる 2 種類の輸送形態を包含している。

スプリット・オペレーター・アプローチは、移流と拡散の計算を便宜的に分離し、短い時間ステップ毎に交互に計算を繰り返すものである。この手法は、移流と拡散の各々に対して別個に最適な計算スキームを選択できるというメリットがある。拡散の計算は比較的精度良く行えるのに対し、移流の計算は従来より多くの計算法が提案されているにもかかわらず、計算結果に無視できない誤差が含まれているのが実状であった。

Holly-Preissmann(1977)は Two-point fourth order method (Holly-Preissmannスキーム) を提案し、移流による輸送の計算に関して従来 of 計算方法と比べると飛躍的に改善された結果を得た。しかし、この計算法では濃度だけでなくその空間微係数も従属変数となるため、この微係数自身も移流、拡散させなければならない。1次元問題での適用は比較的簡単なものの、2次元問題では非常に複雑で計算量が大幅に増加するなど不経済なスキームとなってしまった

(Glass-Rodi(1982), Holly-Usseglio(1984))。

そこで、本章ではまず、精度の点でも計算の容易さの点でもHolly-Preissmannスキームの短所を十分補った移流の高精度計算スキームとしてSix-pointスキームを提案する。次にこのSix-pointスキームの数値誤差を少なくしてさらに精度を高めた改良型Six-pointスキームについて述べる。また、1階の移流方程式の代わりに2階の波動方程式を解くという新しい概念に基づいた、移流のためのコンパクトな計算法であるSOWMACスキームについても提案・説明する。

2. 2 移流項の計算法

2.2.1 移流拡散方程式

大気中や自然水域における汚染物質の拡散シミュレーションを行う場合、汚染物質の存在が流れに影響を与えるときは流れと物質輸送を規定する方程式を連立して解かなければならない。一方、汚染物質が流れに影響を及ぼさないpassive contaminantの場合には、流れの計算によって得られた流れ場の情報を用いて物質輸送に関する移流拡散方程式を解けば良い。この物質輸送を規定する移流拡散方程式は3次元の場合、次式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} + W \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

ここで、 C は濃度、 U, V, W は平均流速成分、 K_x, K_y, K_z は x, y, z 方向の乱流拡散係数である。

この方程式の理論的な解は、いくつかの理想的な条件、すなわち平均流速と乱流拡散係数が一定で、拡散物質を瞬間放出もしくは連続放出する場合等につ

いて得られているが、現象の複雑な実際の自然水域や大気中の拡散問題を取り扱うときは上式を直接数値計算しなければならない。

一方、河川や細長い湾のように断面平均した流速や濃度で拡散現象を近似的に表現し得る場合は1次元の移流分散方程式

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} + \frac{\partial(AUC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \overline{D_x} \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

を用いることも可能である。ここでAは断面積、U、Cはそれぞれ断面平均された流速、濃度であり、 $\overline{D_x}$ は流速や濃度の断面分布の非一様性の影響が考慮された移流分散係数である。通常 $\overline{D_x} \gg K_x$ であることから式(2.2)では既に K_x が省略されている。

また、広い湖沼や内湾、海洋のような水深方向のスケールが水平方向のスケールに比べて極端に小さい場合は、水深方向に平均された流速・濃度で拡散を記述できることが多い。このときの2次元移流分散方程式は

$$\frac{\partial(hC)}{\partial t} + \frac{\partial(hUC)}{\partial x} + \frac{\partial(hVC)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

である。ここに、hは水深、 D_x 、 D_y は水深方向の流速や濃度の分布の影響が加味されたx方向、y方向の移流分散係数であり、通常 $D_x \gg K_x$ 、 $D_y \gg K_y$ である。

2.2.2 拡散方程式の数値計算法

移流拡散(分散)方程式(式(2.1)、(2.2)もしくは(2.3))は、双曲型の性質をもつ移流項と放物型の性質をもつ拡散項という物理的にも数学的にも性質の異なる2種類の輸送形式を有する偏微分方程式である。

右辺の拡散や分散による輸送は種々の差分形式を用いてかなり正確に計算することが可能である。一方、平均流による輸送、すなわち移流項の数値計算は

従来より1次精度風上差分, 2次精度風上差分, Leapfrogスキーム, Lax-Wendroffスキーム(1960), QUICK法(Leonard(1979))等多くのスキームを用いて行われてきたが、ダンピングや位相のずれなどの数値誤差が大きく、拡散・分散の計算に匹敵するほどの正確な計算は容易ではなかった。したがって種々の工夫がなされてきたが、大別すると1つは移流と拡散の計算を同時に行おうとするもので有限要素法(FEM)を用いて試みられている。もう1つは移流と拡散・分散を別個に独立させて1タイムステップ毎に取り扱おうとするもの(スプリット・オペレーター・アプローチ)でそれぞれの計算プロセスに対し最適な計算方法を選択できるという大きな長所がある。特に後者は移流項の計算に対し特性曲線法を用いることにより境界条件を自然な形で取り入れている。

(a) スプリット・オペレーター・アプローチ (Split operator approach)

1次元問題から多次元問題への拡張は比較的容易であるから、ここでは簡単のため1次元の移流分散方程式(A = 一定の場合)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

を考える。式(2.4)を単純な差分で離散化すると濃度のダンピングや位相のずれなどの数値拡散、数値分散が大きくなり、ときには右辺の移流分散と同等あるいはそれ以上の大きさをもつことがある。

スプリット・オペレーター・アプローチでは1タイムステップ毎に左辺の移流と右辺の分散を便宜的に分離して、まず最初に次式にしたがって濃度Cを輸送させる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

上式により新しいタイムステップ(n+1)における濃度Cⁿの分布を求める。続

いて C^a をタイムステップ n における濃度として、 $n \sim (n+1)$ タイムステップ間で次式

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (2.6)$$

を解くことにより、 Δt 時間に拡散された最終的な濃度 C^{n+1} を求める。

式(2.6)の計算は式(2.5)に比べると容易で、例えば”一般化されたCrank-Nicolsonスキーム”で精度良く計算される。簡単のため $D_x = \text{const.}$ として式(2.6)を差分化すると次式のように表される。

$$\frac{C^{n+1}_i - C^n_i}{\Delta t} = \frac{\theta D_x}{(\Delta x)^2} \{C^{n+1}_{i+1} - 2C^{n+1}_i + C^{n+1}_{i-1}\} + \frac{(1-\theta) D_x}{(\Delta x)^2} \{C^n_{i+1} - 2C^n_i + C^n_{i-1}\} \quad (2.7)$$

ここで θ は重みを表すパラメーターで $0 \leq \theta \leq 1$ である。 $\theta = 0$ のとき explicit、 $\theta > 0$ のときは implicit な計算法となる。 $0 \leq \theta < 1/2$ に対しては安定条件

$$\frac{D_x \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2-4\theta} \quad (2.8)$$

が満足されなければならない。 $\theta \geq 1/2$ に対しては無条件に安定であるので、 $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolsonスキーム) が良く用いられる。

(b) 特性曲線法を用いた純粋移流の計算

特性曲線によるアプローチは1次元の場合に最も簡単に説明できる。1次元の移流方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

式(2.9)の左辺は全微分と比較して、以下のように書くことができる。

$$\frac{dx}{dt} = U \quad \text{上で} \quad \frac{dC}{dt} = 0 \quad (2.10)$$

これらの常微分方程式は $\frac{dx}{dt} = U(x, t)$ で定義される時空間の軌跡上で濃度が

一定に保たれることを示している。すなわち図2-1に示された時空間の計算格子において式(2.10)を用いることは次のことを意味している。もし時刻 t_n で全ての格子点において濃度が既知であるとすれば、時刻 t_{n+1} における格子点の未知の濃度は式(2.9)の解から次のように与えられる。

$$C_i^{n+1} = C_i^n \quad (2.11)$$

ここで、上添字 n は時刻 t_n を表し、下添字 i は計算格子点 x_i を表す。 ξ は格子点 (x_i, t_{n+1}) を通過する軌跡の $t = t_n$ のときの x 座標を示す。したがって時刻 t_{n+1} の格子点 x_i における新しい濃度の値を求める問題は、時刻 t_n 、場所 ξ における古い濃度の値を求める問題に置き換えられることになる。このことから純粋移流の計算スキームの精度はいかに C_i^n を正確に評価するかに依存することになる。次節以降で、この C_i^n の評価のためのいくつかの内挿スキームや代表的な差分法について述べる。

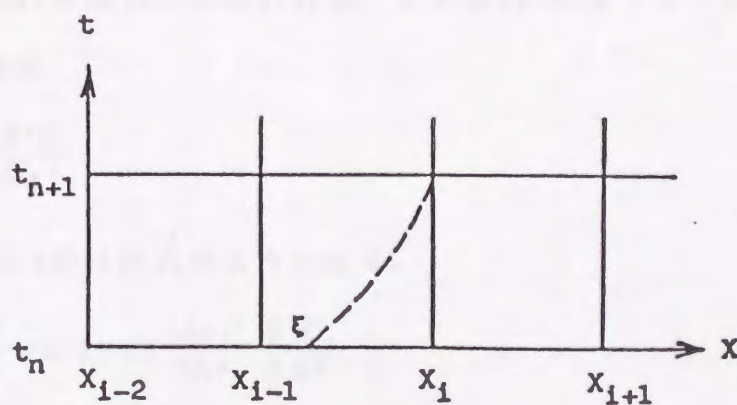


図2-1 1次元の差分格子

1) 直線内挿スキーム

式(2.11)の C_i^n はタイムステップ n における濃度の値である。 n ステップにおいては各計算格子点での濃度の値は皆既知であるが、格子点以外の場所における値は何らかの方法で推定しなければならない。図2-1より (x_i, t_{n+1}) における流速 U を用いて特性曲線を遡ると、 $t = t_n$ との交点 ξ の座標は $(x_i - U \Delta t, t_n)$ となる。最も簡単な推定法は直線内挿式で内挿することである。 $U \Delta t \leq \Delta x$ の場合は ξ は x_i と x_{i-1} の間にあるので、 C_{i-1}^n と C_i^n で直線内挿を行うと

$$C_i^{n+1} = C_\xi^n = \frac{U \Delta t C_{i-1}^n + (\Delta x - U \Delta t) C_i^n}{\Delta x} = \frac{U \Delta t}{\Delta x} C_{i-1}^n + \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x}\right) C_i^n \quad (2.12)$$

となる。これは1次精度の風上差分と等価なスキームである。ここで、 C_i^n のまわりに2次の項までTaylor級数展開して C_i^{n+1} 、 C_{i-1}^n を求めると

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &= C_i^n + \frac{\partial C}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ C_{i-1}^n &= C_i^n - \frac{\partial C}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。式(2.13)を式(2.12)に代入し、また式(2.9)より $U = \text{const.}$ の仮定のもとで得られる次式

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = U^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

を用いると式(2.12)は次式のようにになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha (1 - \alpha) \frac{(\Delta x)^2}{2 \Delta t} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

ここで

$$\alpha \equiv \frac{U \Delta t}{\Delta x} \quad (2.16)$$

はクーラン数であり、流速の大きさと計算格子幅によって定義される、移流方

程式における重要な無次元パラメーターである。式(2.15)の右辺は式(2.9)の移流方程式を式(2.12)のように差分化したときの数値誤差を表しており、その係数を

$$K_n \equiv \alpha(1-\alpha) \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (2.17)$$

とおくと、 K_n は数値分散係数 (artificial dispersion coefficient) と呼ばれる。式(2.17)より $\alpha = 0$ もしくは $\alpha = 1$ のときは $K_n = 0$ となり、式(2.12)の計算は式(2.9)の厳密解を与える。一般的には α は整数とは限らないので K_n が存在し、後で1次精度の風上差分の計算例として示すように、大きなダンピングを引き起こすことになる。

2) Holly-Preissmannスキーム (Two-point fourth-order method)

Holly-Preissmann(1977)は、 C_i^n を評価するための内挿式として濃度 C_{i-1}^n , C_i^n だけでなくその空間微係数 CX_{i-1}^n , CX_i^n も用いる3次のHermite多項式を導入した。

すなわち、 $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して以下のようなものである。

$$C_i^{n+1} = C_i^n = a_1 C_{i-1}^n + a_2 C_i^n + a_3 CX_{i-1}^n + a_4 CX_i^n \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad a_1 &= \alpha^2(3-2\alpha) & , \quad a_2 &= 1-a_1 \\ a_3 &= \alpha^2(1-\alpha)(x_i-x_{i-1}) & , \quad a_4 &= -\alpha(1-\alpha)^2(x_i-x_{i-1}) \end{aligned}$$

式(2.18)を用いて順次時間方向に計算を進めていくためには、ここで CX_i^n の値も求めておかなければならない。式(2.9)を x に関して1回微分すれば次式のような CX に関する移流方程式が得られる。

$$\frac{\partial CX}{\partial t} + U \frac{\partial CX}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

式(2.18)を導いた場合と同じ方法で $[x_{i-1}, x_i]$ の間で内挿すると CX_i^n に関する式が次のように求まる。

$$CX_i^{n+1} = CX_i^n = b_1 C_{i-1}^n + b_2 C_i^n + b_3 CX_{i-1}^n + b_4 CX_i^n \quad (2.20)$$

ここに

$$b_1 = \frac{6\alpha(\alpha-1)}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_2 = -b_1$$

$$b_3 = \alpha(3\alpha-2), \quad b_4 = (\alpha-1)(3\alpha-1)$$

式(2.18), 式(2.20)を用いて計算格子毎に C と CX の値を新しい $(n+1)$ タイムステップについて求めていく。

式(2.4)の右辺のように拡散もしくは分散のある流れでは、式(2.18), (2.20)を用いて C と CX の純粋移流の計算を行った後、式(2.6)と式(2.6)を x に関して微分することによって得られる次式

$$\frac{\partial CX}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial CX}{\partial x} \right) \quad (2.21)$$

を用いて C と CX の拡散の計算を各タイムステップ毎に行うことになる。

Holly-Preissmannスキームは従来より提案されている多くの計算スキームと比較しても非常に高い精度を有するスキームであり、ダンピングや位相のずれも小さい。

流速 $U = 0.5 \text{ m/s}$ の一様流速をもつ1次元水路を考える。計算格子間隔を $\Delta x = 200 \text{ m}$ として $\alpha = 0.25 (\Delta t = 100 \text{ sec})$, $\alpha = 0.5 (\Delta t = 200 \text{ sec})$, $\alpha = 0.75 (\Delta t = 300 \text{ sec})$ の場合について、図2-2に示されたような初期濃度分布を純粋移流させる計算をHolly-Preissmannスキーム, 1次精度風上差分を用いて行い、その結果を図2-2に示す。

図中に示す1次精度の風上差分に比べると格段に精度が改善されていることがわかる。スキームの精度は濃度だけでなく Δx と濃度分布の広がりスケールの比にも依存する。本来の物質拡散が加わると Δx に対する濃度分布の相対的

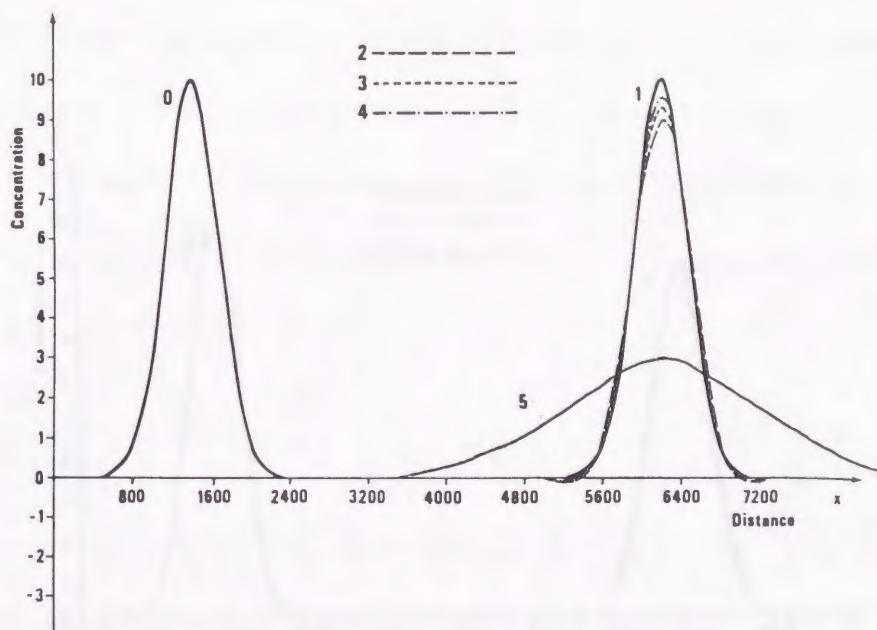


図 2 - 2 Holly-Preissmannスキームによる数値拡散

0:初期濃度分布, 1:t=9,600sのときの厳密解

2, 3, 4: $\alpha=0.25, 0.5, 0.75$ の場合のt=9,600sの計算結果

5:直線内挿式(2.12) ($\alpha=0.25$)によるt=9,600sの計算結果

な拡がりが増して、そのため数値拡散は減少し計算精度は向上する。図 2 - 3 は式(2.4)を (a) $D_x = 1\text{m}^2/\text{s}$ の場合と (b) $D_x = 10\text{m}^2/\text{s}$ の場合について、移流の計算にHolly-Preissmannスキームを使って計算した結果である。この図からも明らかなように、強い物理拡散があれば移流の計算の不正確さが覆い隠される傾向にある。

以上のようにHolly-Preissmannスキームは従来の計算スキームと比べると飛躍的に改善された結果を得た。このスキームは、拡散物質の濃度だけでなく濃度の場所的な変化率も従属変数として移流拡散させるもので、1次元問題への適用は簡単であり、満足すべき結果が得られている。しかしながら2次元問題

への適用は非常に煩雑でかつ計算時間を要し、とても実用的とは言えない

(Glass-Rodi(1982), Holly-Usseglio(1984))。

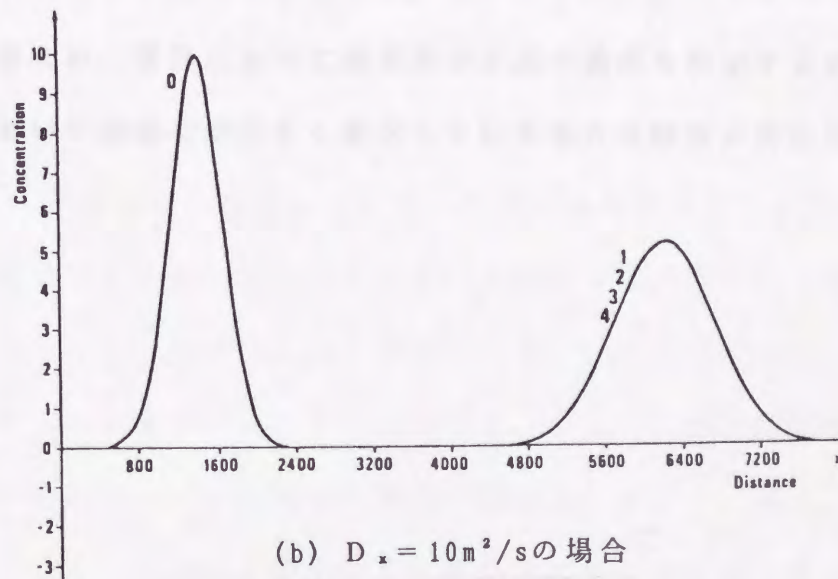
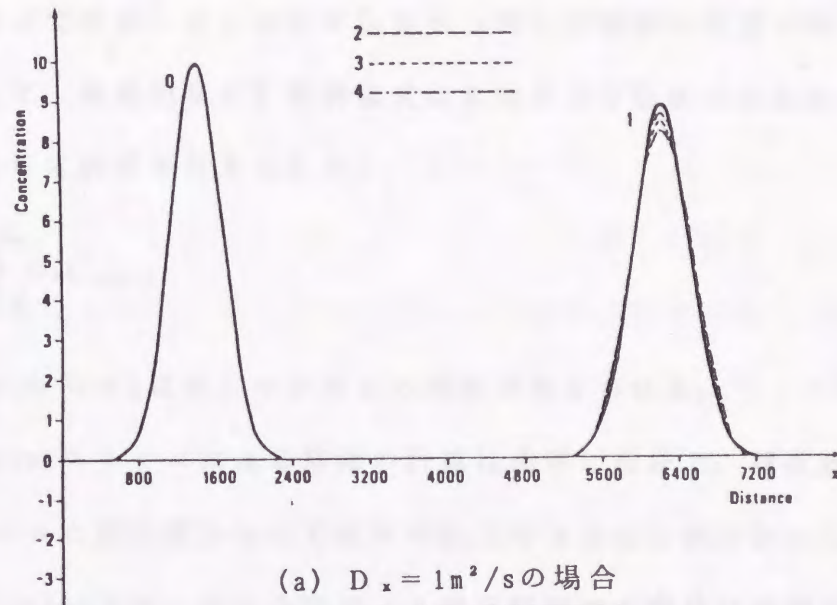


図 2 - 3 拡散の大きさが数値誤差に与える影響

0:初期濃度分布, 1:t=9, 600sのときの厳密解

2, 3, 4: $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$ の場合の t=9, 600s の計算結果

3) Eight-pointスキーム

Holly-Preissmannスキームにとって代わるべき計算法として、小松-Holly(1984)によってEight-pointスキームが提案された。このスキームでは、Holly-Preissmannスキームで用いられる C_{i-1} と C_i をそれぞれ4つの3次関数の荷重平均によって求め、さらに $C_{i+1/2}$ も3つの3次関数の荷重平均として求めている。そして、最終的な C_i^m の評価式は C_{i-4} から C_{i+3} までの8点の濃度だけを用いた式として次式で与えられた。

$$C_i^m = \sum_{k=1}^8 b_k C_{i+k-5} \quad (2.22)$$

ここに、 b_1 から b_8 はクーラン数 α の関数で与えられる。

Eight-pointスキームによる移流の計算は非常に良好で、精度はHolly-Preissmannスキームと同程度かもしくはそれ以上であることが分かっている。また、このEight-pointスキームは2次元・3次元問題にも容易に適用可能であり、精度良く計算できることが示されている。しかしながら、このスキームは8点の濃度を用いるため、境界において境界外の3点の濃度を推定する必要があり、境界付近において濃度 C が大きく変化している場合は精度の劣化は免れ得ない。

2. 3 Six-pointスキームの開発

2.3.1 はじめに

Holly-Komatsu(1983), 小松-Holly(1984)は、精度の点でも計算の容易さの点でもHolly-Preissmannスキームの短所を十分補ったEight-pointスキームを提案し、2次元問題適用への道を拓いた。しかしながらEight-pointスキームを用いる際にもなお、以下のようにいくつかの実際の難しい問題点が残されている。

- (1) 2次元問題においてそれぞれの格子点の値を内挿するためには、そのまわりの64点の格子点濃度が必要であり、結果としてはかなり煩雑な計算法となっている。
- (2) 境界外の3点の濃度の値を推定しなければならず、このことから計算結果の精度が低下する可能性がある。
- (3) 左右の対称性に基づいて定式化されているため、非一様な格子間隔の場合精度が損なわれてしまう可能性がある。

本章では、ほぼ同じ精度を有し、かつ6点の濃度の値のみ用いる計算法(Six-pointスキーム)を開発・提案し、また、精度と複雑さの兼ね合いを考慮した本スキームの境界条件の取り扱い方も示す。この計算法の適用例として1次元、2次元のモデル計算を行い、1次元問題では非一様間隔格子や非一様流速の場合の計算精度への影響についても議論を行う。また、この計算法の1次元問題への実際的な適用例として河川の分合流問題を取り上げる。更に、2次元問題への適用例として、不連続な濃度分布が純粹移流される問題や角を回る流れ場における濃度の移流拡散問題を取り上げている。

2.3.2 Six-pointスキームの誘導

図2-4は1次元の計算領域内部の格子を示し、今、計算境界の影響はないものとする。

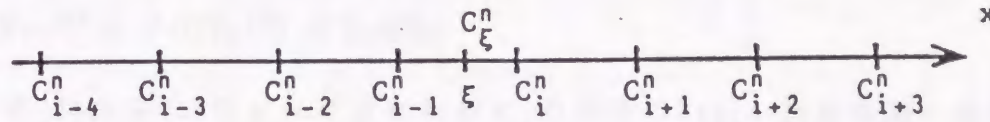


図2-4 1次元計算領域の内部における計算格子

x_{i-1} の回りにTaylor級数展開して C_{i-2}^n , C_{i-3}^n , C_{i-4}^n を求めると以下のようなになる。

$$C_{i-2}^n = C_{i-1}^n - CX_{i-1}^n(\Delta x) + \frac{1}{2!}CXX_{i-1}^n(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}CXXX_{i-1}^n(\Delta x)^3 + \dots$$

$$C_{i-3}^n = C_{i-1}^n - CX_{i-1}^n(2\Delta x) + \frac{1}{2!}CXX_{i-1}^n(2\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}CXXX_{i-1}^n(2\Delta x)^3 + \dots$$

$$C_{i-4}^n = C_{i-1}^n - CX_{i-1}^n(3\Delta x) + \frac{1}{2!}CXX_{i-1}^n(3\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}CXXX_{i-1}^n(3\Delta x)^3 + \dots$$

(2.23)

ここで、 Δx = 格子間隔, $CXX = \partial^2 C / \partial x^2$, $CXXX = \partial^3 C / \partial x^3$ である。式(2.23)における4次以上の高次の項を無視すれば C_{i-2}^n , C_{i-3}^n , C_{i-4}^n は既知なので、 CX_{i-1}^n , CXX_{i-1}^n , $CXXX_{i-1}^n$ の3つの量が未知量として残る。したがって式(2.23)の3方程式を連立させて解けば、 CX_{i-1}^n を求めることができる。

x_{i-4} から x_{i+2} までの7つの格子点における濃度を用いて、上述の $(i-4)$ から $(i-1)$ のように連続した4つの格子点、 $(i-3)$ から (i) , $(i-2)$ から $(i+1)$, $(i-1)$

から(i+2)を用いたTaylor級数展開の組み合わせが同じようにして更に3組構築できる。これらの組み合わせは、上添字の(1)から(4)で区別され、それぞれの連立方程式を解くことにより x_{i-1} における微係数 CX_{i-1}^{η} の推定値が求められる。

$$\begin{aligned} CX_{i-1}^{(1)} &= f(C_{i-4}^{\eta}, C_{i-3}^{\eta}, C_{i-2}^{\eta}, C_{i-1}^{\eta}) \\ CX_{i-1}^{(2)} &= f(C_{i-3}^{\eta}, C_{i-2}^{\eta}, C_{i-1}^{\eta}, C_i^{\eta}) \\ CX_{i-1}^{(3)} &= f(C_{i-2}^{\eta}, C_{i-1}^{\eta}, C_i^{\eta}, C_{i+1}^{\eta}) \\ CX_{i-1}^{(4)} &= f(C_{i-1}^{\eta}, C_i^{\eta}, C_{i+1}^{\eta}, C_{i+2}^{\eta}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

上添字(2)から(5)によって示される x_i の回りのTaylor級数展開の他の組み合わせも同じように得られ、それらを連立させて解くことにより点 x_i における微係数の推定値も以下のように求められる。

$$\begin{aligned} CX_i^{(2)} &= f(C_{i-3}^{\eta}, C_{i-2}^{\eta}, C_{i-1}^{\eta}, C_i^{\eta}) \\ CX_i^{(3)} &= f(C_{i-2}^{\eta}, C_{i-1}^{\eta}, C_i^{\eta}, C_{i+1}^{\eta}) \\ CX_i^{(4)} &= f(C_{i-1}^{\eta}, C_i^{\eta}, C_{i+1}^{\eta}, C_{i+2}^{\eta}) \\ CX_i^{(5)} &= f(C_i^{\eta}, C_{i+1}^{\eta}, C_{i+2}^{\eta}, C_{i+3}^{\eta}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

CX_i^{η} , CX_{i-1}^{η} の最終的な推定値を得られた4つの値の荷重平均(重み l)により求めることにする。

$$\begin{aligned} CX_{i-1}^{\eta} &= \frac{1}{2(l+1)} \{CX_{i-1}^{(1)} + l \cdot CX_{i-1}^{(2)} + l \cdot CX_{i-1}^{(3)} + CX_{i-1}^{(4)}\} \\ CX_i^{\eta} &= \frac{1}{2(l+1)} \{CX_i^{(2)} + l \cdot CX_i^{(3)} + l \cdot CX_i^{(4)} + CX_i^{(5)}\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

C_i^{η} , C_{i-1}^{η} と上式の微係数を用いてHolly-Preissmannスキームと同様の内挿多項式を構成して計算を行った結果、ダンピング誤差は減少したが、空間的な振動や負の濃度に見られるようにより大きな位相誤差を生じた。多くの数値実験と直感的な理由から次のことが示唆された。すなわち位相誤差を減らすには、より高次の微係数を求めるのではなく、 CX_{i+2} の推定値を求め用いることにより、良好な結果が期待できるということである。5つの級数展開の組み合わせのうち中央に近い3つを、 x_{i+2} における CX_{i+2} を評価するのに採用し、以下の

ように荷重平均（重み m ）して求めることにする。

$$CX_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{m+2} \{CX_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} + m \cdot CX_{i+\frac{1}{2}}^{(3)} + CX_{i+\frac{1}{2}}^{(4)}\} \quad (2.27)$$

最適な重み l と m については後で議論する。

最終的な C_i^n は次の 2 つのコンパクトな 3 次多項式を平均したものをを用いることにした。1 つは $C_{i-1}^n, CX_{i-1}^n, CX_{i+\frac{1}{2}}^n, C_i^n$ を用いて構成したもの、もう 1 つは $C_{i-1}^n, CX_{i+\frac{1}{2}}^n, CX_i^n, C_i^n$ を用いた多項式であり、平均してまとめると以下のようになる。

$$C_i^{n+1} = C_i^n = A_1 C_{i-1}^n + A_2 C_{i-1}^n + A_3 C_{i-2}^n + A_4 C_{i-1}^n + A_5 C_i^n + A_6 C_{i+1}^n + A_7 C_{i+2}^n + A_8 C_{i+3}^n \quad (2.28)$$

ここで、 $A_1 \sim A_8$ は α に関する 3 次多項式で、重み l と m を含んでいる。ここで $\alpha = (x_i - \xi) / (x_i - x_{i-1}) = U \Delta t / \Delta x$ である。

式(2.28)は 8 つの C の値を用いて構成されており、ほとんど Eight-point スキームと同じである。ところで本研究の最終的な目的は Eight-point スキームよりもコンパクトな計算法を開発することである。そのためには、式(2.28)で用いている C の値の数を減らさなければならない。 $CX_{i-1}^{(1)}$, $CX_i^{(6)}$ の評価式ではそれぞれ両端の C_{i-4}^n , C_{i+3}^n を用いている。式(2.28)の詳細な解析により、式(2.26)中の $CX_{i-1}^{(1)}$, $CX_i^{(6)}$ にはそれぞれ $CX_{i-1}^{(4)}$, $CX_i^{(2)}$ に含まれている誤差を相殺するという重要な役割があることが分かった。したがって、 CX_{i-1} , CX_i を推定する際の C の使用数の総数を減らすという目的のために $CX_{i-1}^{(1)}$, $CX_i^{(6)}$ を省略することは避けなければならない。ここでは、 C_{i-4}^n , C_{i+3}^n の値をそのまま使用するのではなく推定使用することにより C の実質的な使用数の減少を試みることにする。 C_{i-4}^n , C_{i+3}^n を推定するために次のような簡単な線形の外挿法を採用する。

$$\begin{aligned} C'_{i-4} &= 2C_{i-3} - C_{i-2} \\ C'_{i+3} &= 2C_{i+2} - C_{i+1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで C'_{i-4} と C'_{i+3} はそれぞれ、 C_{i-4} と C_{i+3} の推定値である。 $C_{i-4} = C'_{i-4}$, $C_{i+3} = C'_{i+3}$ と仮定し、式(2.29)を式(2.24), (2.25)に代入し式(2.28)を再度整理し直すと以下のような6点のCを用いた計算スキームが得られる。

$$C_i^{n+1} = \sum_{k=1}^6 b_k \cdot C_{i+k-4}^n \quad (2.30)$$

ここで、 b_k ($k=1, 2, \dots, 6$) はクーラン数 α に関する3次多項式である。

式(2.30)に対しTaylor級数解析を行うと、式(2.29)のような直線外挿を行っているため打ち切り誤差が2次のオーダーから始まり次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} &= \{-\beta_1 \alpha^2 + \beta_1 \alpha\} \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \{\beta_2 \alpha^2 - \beta_2 \alpha\} \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \\ &+ [-\alpha^4 + 2\alpha^3 + \{-3 + \beta_3\} \alpha^2 + \{2 - \beta_3\} \alpha] \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \\ &+ \left[\alpha^5 - 5r_1 \alpha^3 + \left\{ \frac{15}{2} r_1 - \beta_4 \right\} \alpha^2 + \{-r_2 + \beta_4\} \alpha \right] \frac{(\Delta x)^5}{5!} \frac{\partial^5 C}{\partial x^5} + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

ここで

$$\beta_1 = \frac{1}{3(\ell+1)}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2(\ell+1)}, \quad \beta_3 = \frac{6\ell-34}{3(\ell+1)}, \quad \beta_4 = \frac{5(\ell-12)}{2(\ell+1)}, \quad r_1 = \frac{m+6}{m+2}, \quad r_2 = \frac{7m+34}{2(m+2)}$$

であり、 U と Δx は一定と仮定している。重み m の値は、5次のオーダーの artificial dispersion coefficient の2乗の積分値を最小にするように推定した。すなわち、

$$\int_0^1 \{5\text{次のオーダーのa.d.c.}\}^2 d\alpha$$

を最小にするように m を求めると、

$$m = -11.23 \quad (2.32)$$

が得られた。ここで、a. d. c. は artificial dispersion coefficient の略である。他の 2 次、3 次、4 次の a. d. c. は全て重み ϱ を含んでいる。2 次、3 次、4 次のそれぞれの a. d. c. の 2 乗の積分値を同時に最小にするような解析解は得られなかったので ϱ を理論的に決定することはできなかった。したがって、Gauss 型濃度分布の移流数値実験を数多く行い、 ϱ の最適値として $\varrho = 9.55$ を決定した。

m , ϱ の値を代入・整理して得られる本スキームの最終的な代数表現は以下のようなになる。

$$C_i^{n+1} = b_1 C_{i-3}^n + b_2 C_{i-2}^n + b_3 C_{i-1}^n + b_4 C_i^n + b_5 C_{i+1}^n + b_6 C_{i+2}^n \quad (2.33)$$

(Six-point スキーム)

ここで、

$$b_1 = -0.01806\alpha^3 - 0.03828\alpha^2 + 0.05633\alpha$$

$$b_2 = 0.2570\alpha^3 + 0.05276\alpha^2 - 0.3097\alpha$$

$$b_3 = -0.6806\alpha^3 + 0.6480\alpha^2 + 1.033\alpha$$

$$b_4 = 0.6806\alpha^3 - 1.394\alpha^2 - 0.2869\alpha + 1$$

$$b_5 = -0.2570\alpha^3 + 0.8236\alpha^2 - 0.5667\alpha$$

$$b_6 = 0.01806\alpha^3 - 0.09245\alpha^2 + 0.07439\alpha$$

式 (2.33) は 6 点の C を用いているので Six-point スキームと名付けることにする。

2.3.3 モデル計算と評価

(a) 1次元の場合

ここではSix-pointスキームの検証のためのモデル計算として、Gauss型濃度分布が単位幅で無限長の水路を一定の流速0.5m/sで純粹移流する場合の数値計算を行った。Gauss型濃度分布の標準偏差は $\sigma = 264\text{m}$ 、計算格子幅は $\Delta x = 200\text{m}$ で一様である。図2-5は厳密解と $\Delta t = 100\text{s}$ で各種スキームを用いた場合の9,600sec後の計算解を示している。すなわち、Six-pointスキーム(式(2.33))、Eight-pointスキーム(式(2.22))、Holly-Preissmannスキーム(式(2.18)と(2.20))、式(2.9)から導かれた1次精度の陽的な風上差分(式(2.12))である。初期条件としてより条件の厳しい台形濃度分布をもつときの同様の純粹移流の計算結果を図2-6に示す。

4つの計算スキームの中で最後の風上差分は大きな数値拡散を引き起こしている。Six-pointスキームは、Eight-pointスキームやHolly-Preissmannスキームとほぼ同程度の高精度を保っている。

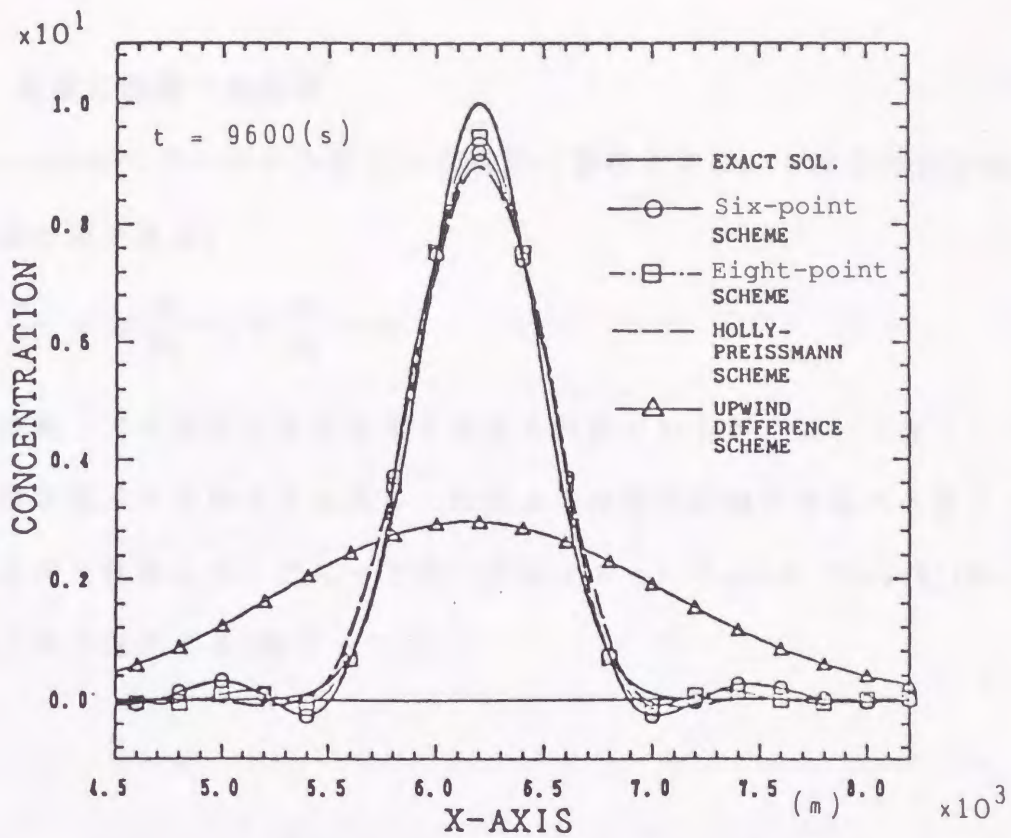


図 2 - 5 Gauss型濃度分布の純粹移流に対する数値解と厳密解の比較

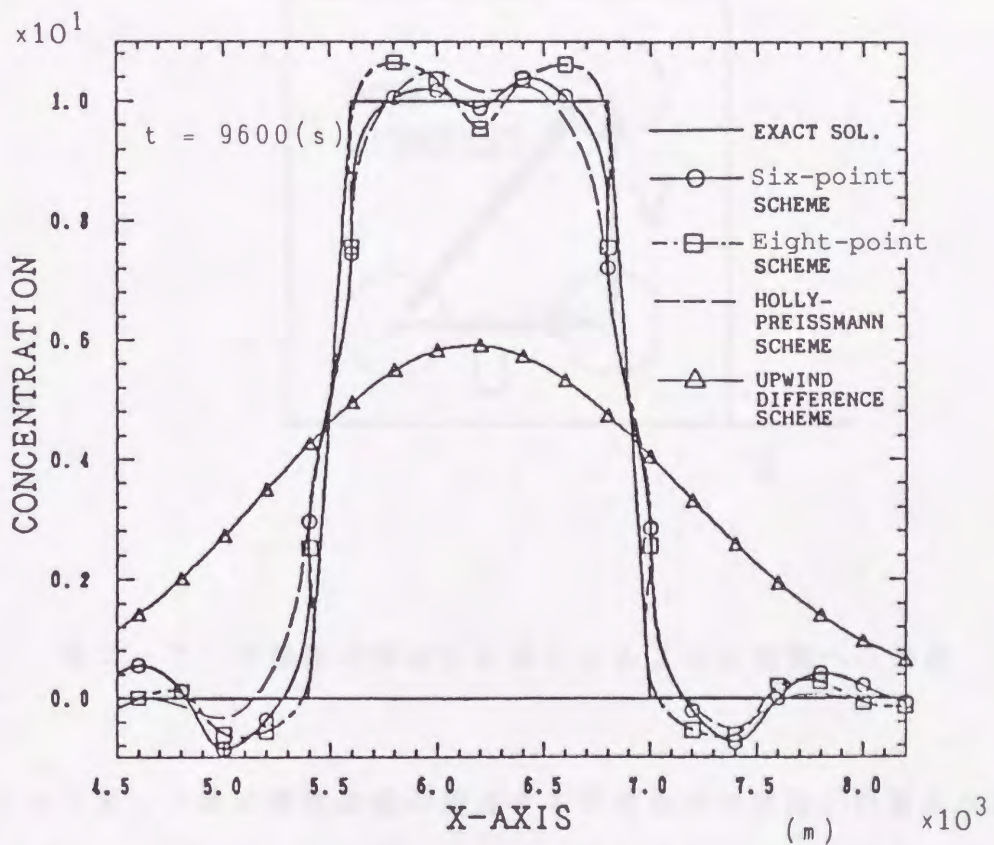


図 2 - 6 矩型の濃度分布の純粹移流に対する計算解と厳密解の比較

(b) 2次元問題への拡張

Six-pointスキームの2次元への適用は簡単である。2次元の純粋移流方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2.34)$$

特性曲線上では濃度は変化せずそのまま保存されるが、短い1タイムステップ内に流体粒子が移動する経路を、計算上では特性曲線の経路から変えて、最初にx方向に移動して、次にy方向に移動するというADI法 (Leith(1965)) と同様な手法を採用する(図2-7)。

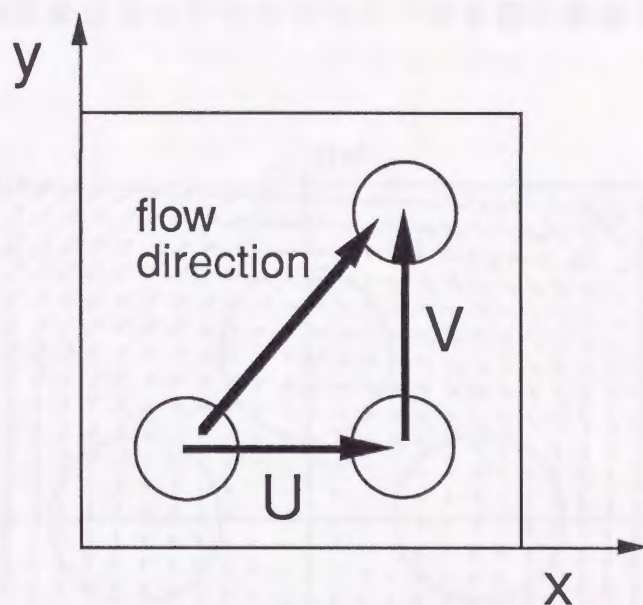


図2-7 2段階の移流の計算による2次元問題への適用

1タイムステップ後に特性曲線が到達する地点までの移流の計算を次に示すように2段階に分けて、2度1次元の計算を行うことにする。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2.36)$$

式(2.35), (2.36)は両式とも1次元の純粋移流方程式なので式(2.33)のSix-pointスキームがそのまま適用できる。具体的解法としては、式(2.35)を最初に全計算領域で解いた後、その結果を用いて同一タイムステップ内で式(2.36)を解けば良い。拡散の計算がある場合はその後同一タイムステップ内で続けて行うことになる。

2次元移流問題の計算モデルとして図2-8に示すように、角速度 $2\pi/12,000\text{s}^{-1}$ をもつ剛体回転的な流れの場を考える。時刻 $t=0\text{s}$ で標準偏差 $\sigma_x = \sigma_y = 200\text{m}$ をもつGauss型濃度分布がそれぞれ4つの象限に位置しているとする。

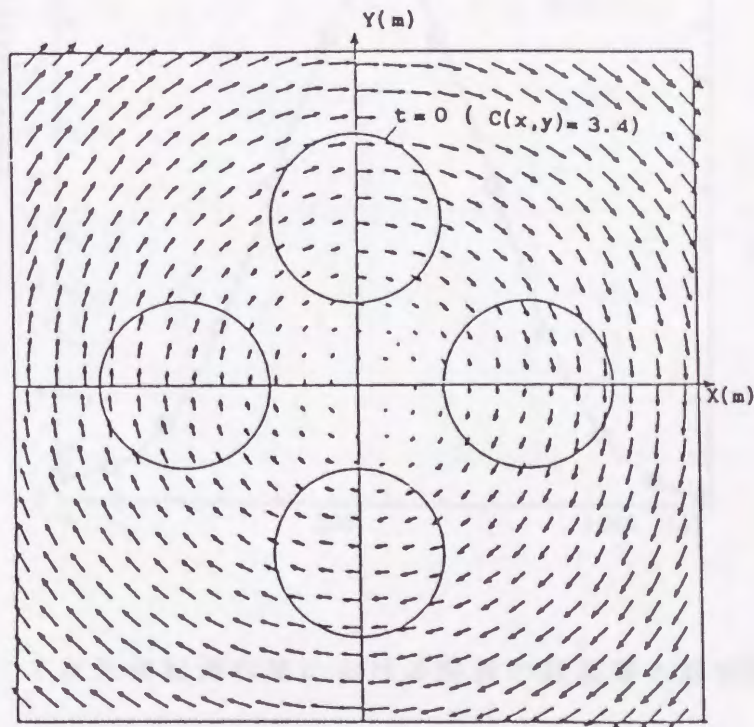


図2-8 2次元の回転流れ場における移流の計算

$\Delta t = 100\text{s}$, $\Delta x = \Delta y = 100\text{m}$ を用いることにする。流れが1/4回転した後の純粋移流の計算結果を式(2.35), (2.36)より求めて図2-9に示す。比較のために2次元のHolly-Preissmannスキーム(1982)とEight-pointスキーム(1984)の結果を示している。Holly-Preissmannスキームの誤差はピーク濃度で1.8%, Six-pointスキームは1.1%, Eight-pointスキームは0.5%であった。

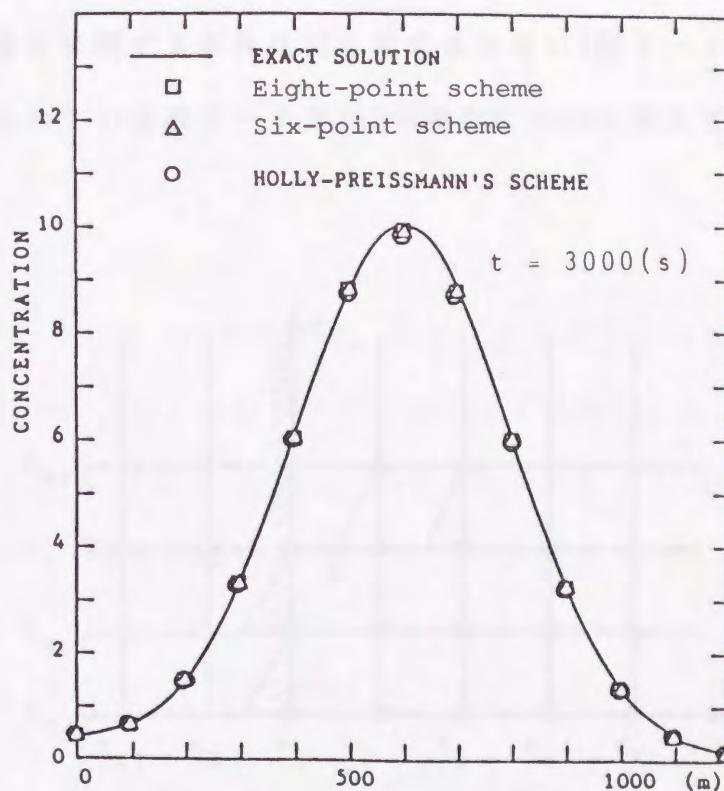


図2-9 2次元回転流れ場における移流の数値解と厳密解の比較

2.3.4 1次元及び2次元問題における境界条件

実際の多くの拡散現象においては境界条件が決定的な役割を果たしており、Six-pointスキームを境界付近へ適用する際の境界外の濃度の推定方法の確立はまず早急に解決しなければならない課題である。種々の推定法が吟味されたが、次に述べる方法は精度と計算の容易さの点から最良と思われるものである。

(a) 1次元の場合

(x, t) 平面における計算領域に特性曲線が入ってくる境界では、境界条件もしくは初期条件が要求され(図2-10(a))、逆に計算領域から特性曲線が出ていく境界では、濃度に関する条件は何ら要求されない(図2-10(b))。まず、境界条件が与えられている図2-10(a)の場合について考えてみる。

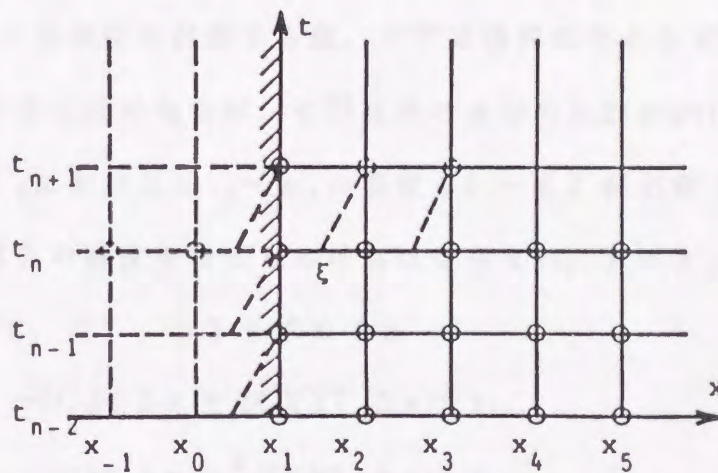


図2-10(a) 特性曲線が計算領域に入ってくる境界

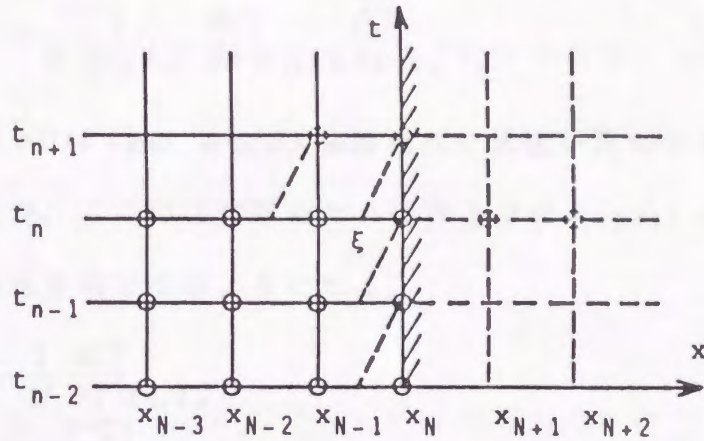


図 2 - 1 0 (b) 特性曲線が計算領域から出ていく境界

$t = t_{n+1}$ における濃度を計算する際、 C_N^n は境界条件として与えられているので C_N^n から始めることになるが、 C_N^n を求めるためにSix-pointスキームを適用すると、 $t = t_n$ における $x_{N-1} \sim x_{N+1}$ の濃度 $C_{N-1}^n \sim C_{N+1}^n$ が必要であり、 C_{N-1}^n 、 C_{N+1}^n の2つの境界外の濃度を推定しなければならない。 $x = x_N$ のまわりにTaylor級数に展開して、 C_{N-1}^n 、 C_{N+1}^n を求めると

$$\begin{aligned} C_{N-1}^n &= C_N^n - 2CX_N^n \Delta x + 2CXX_N^n (\Delta x)^2 + \dots \\ C_{N+1}^n &= C_N^n + CX_N^n \Delta x + \frac{1}{2}CXX_N^n (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。境界においても濃度は移流方程式(2.9)を満足するとすると

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_{x_1} + U(x_1, t) \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x_1} = 0 \quad (2.38)$$

が成立し、その結果

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_1, t_n} &= \frac{-1}{U(x_1, t_n)} \frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{x_1, t_n} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\bigg|_{x_1, t_n} &= \frac{1}{(U(x_1, t_n))^2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\bigg|_{x_1, t_n} + \frac{1}{(U(x_1, t_n))^2} \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{x_1, t_n} \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_1, t_n} \\ &\quad - \frac{1}{U(x_1, t_n)} \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x_1, t_n} \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x_1, t_n}\end{aligned}\quad (2.39)$$

となる。ここに $\partial U/\partial t|_{ln}$, $\partial U/\partial x|_{ln}$ は流れの状態が既知であるので前もって与えられるが、ここでは簡単のため境界上で $U = \text{const.}$ の場合を考えると、式(2.39)は簡単化されて次のようになる。

$$\begin{aligned}CX_1^n &= -\frac{1}{U} \frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{x_1, t_n} \\ CXX_1^n &= \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\bigg|_{x_1, t_n}\end{aligned}\quad (2.40)$$

次に C_1^n のまわりに時間に関して Taylor 級数に展開して、 C_1^{n+1} , C_1^{n+2} を求めると、

$$\begin{aligned}C_1^{n+1} &= C_1^n - \frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{x_1, t_n} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\bigg|_{x_1, t_n} \Delta t^2 + \dots \\ C_1^{n+2} &= C_1^n - 2 \frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{x_1, t_n} \Delta t + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\bigg|_{x_1, t_n} \Delta t^2 + \dots\end{aligned}\quad (2.41)$$

となり、上式を連立させて未知量 $\partial C/\partial t|_{ln}$, $\partial^2 C/\partial t^2|_{ln}$ について解くと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{x_1, t_n} &= \frac{1}{2\Delta t} (C_1^{n+2} - 4C_1^{n+1} + 3C_1^n) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\bigg|_{x_1, t_n} &= \frac{1}{\Delta t^2} (C_1^{n+2} - 2C_1^{n+1} + C_1^n)\end{aligned}\quad (2.42)$$

となる。式(2.42)を(2.40)に代入し、その結果を更に式(2.37)に代入すると、 C_1^n , C_0^n の表示式として

$$\begin{aligned}C_1^n &= \frac{\alpha+2}{\alpha^2} C_1^{n+2} - \frac{4(\alpha+1)}{\alpha^2} C_1^{n+1} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha^2} C_1^n \\ C_0^n &= \frac{\alpha+1}{2\alpha^2} C_1^{n+2} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2} C_1^{n+1} + \frac{(2\alpha+1)(\alpha+1)}{2\alpha^2} C_1^n\end{aligned}\quad (2.43)$$

が与えられ、 C_N^{n+2} , C_N^{n+1} , C_N^n は全て既知の量であるから C_N^n , C_N^{n-1} の推定値が計算できることになる。

図 2-10 (b) の境界条件が与えられていない場合も C_N^n を計算するために C_N^{n+1} , C_N^{n+2} の 2 つの濃度が必要であるが、その評価式は全く同様の手法で求められ次のようになる。

$$C_N^{n+1} = \frac{-(\alpha-1)}{2\alpha^2} C_N^{n+2} + \frac{2\alpha-1}{\alpha^2} C_N^{n+1} + \frac{(2\alpha-1)(\alpha-1)}{2\alpha^2} C_N^n$$

$$C_N^{n+2} = \frac{-(\alpha-2)}{\alpha^2} C_N^{n+2} + \frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2} C_N^{n+1} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{\alpha^2} C_N^n \quad (2.44)$$

なお、境界における $U(x_1, t)$, $U(x_N, t)$ が時間的に一定でないときは式 (2.40) の代わりに式 (2.39) を用いればよい。

式 (2.43), (2.44) の境界外濃度の推算式の有用性を検証するため図 2-11 に示すような Gauss 型濃度分布の 1 次元純粋移流の計算を行う。開水路流れを考え、流速は一定で $U = 0.5 \text{ (m/s)}$ 、Gauss 分布の標準偏差は $\sigma = 264 \text{ (m)}$ 、また $\Delta x = 200 \text{ (m)}$ 、 $\Delta t = 100 \text{ (s)}$ とする。初期の Gauss 分布は U により下流に輸送されるが、ここでは、 $t = 9,600 \text{ (s)}$ の濃度分布を計算している。計算領域の上流側の

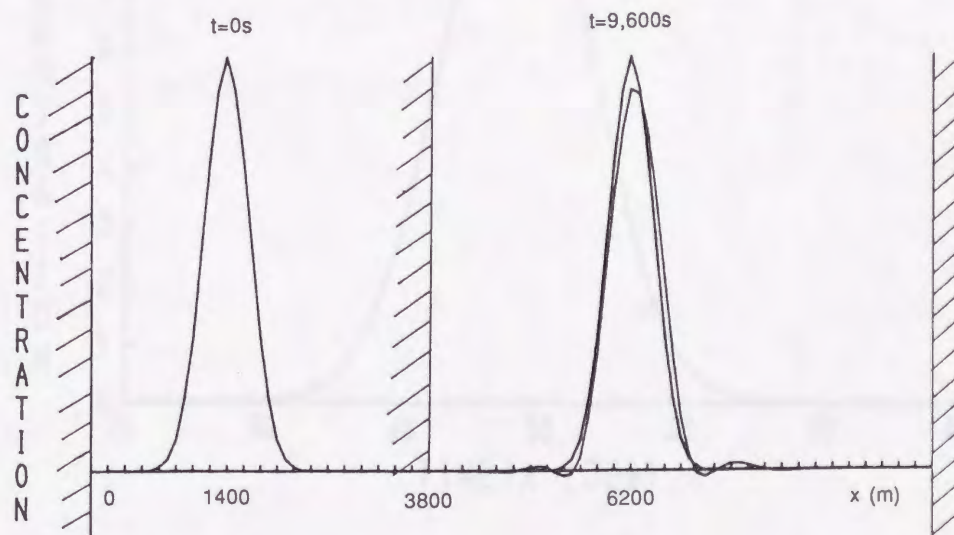


図 2-11 Gauss 濃度分布の移流モデル計算

境界を $x = 0(\text{m})$ にとると、境界条件が計算領域にほとんど影響を与えない場合に相当し、近似的に $C_1^0 = C_2^0 = C_3^0 \approx 0$ とおける。一方上流側の境界を $x = 3,800(\text{m})$ にとると、境界条件は図 2-12 に示すようになり、下流側に対して決定的な役割を果たす。 $x = 0(\text{m})$ に境界がある場合の移流計算結果と、 $x = 3,800(\text{m})$ に境界があり、図 2-12 の境界条件及び式 (2.43), (2.44) を用いて Six-point スキームを適用した計算結果を厳密解と併せて図 2-13 に示す。両者の間に顕著な差異は見られず、式 (2.43), (2.44) は精度良く境界外の濃度を推定していることがわかる。なお最初の 1~2 time step の計算において式 (2.43), (2.44) を適用するとき、初期条件以前の濃度データが必要となる。しかし近似的に初期条件と同じ値を仮定しても大きな誤差は生じず、数 time step で消えてしまうため、実用上は問題ない。

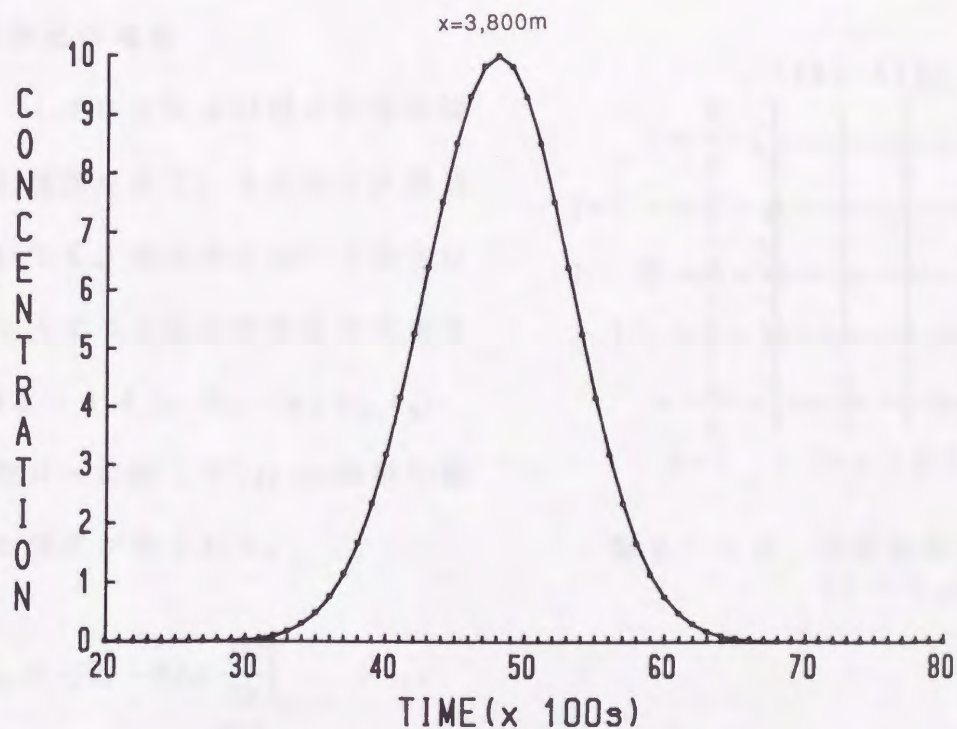


図 2-12 境界条件 ($x = 3,800(\text{m})$ が境界の場合)

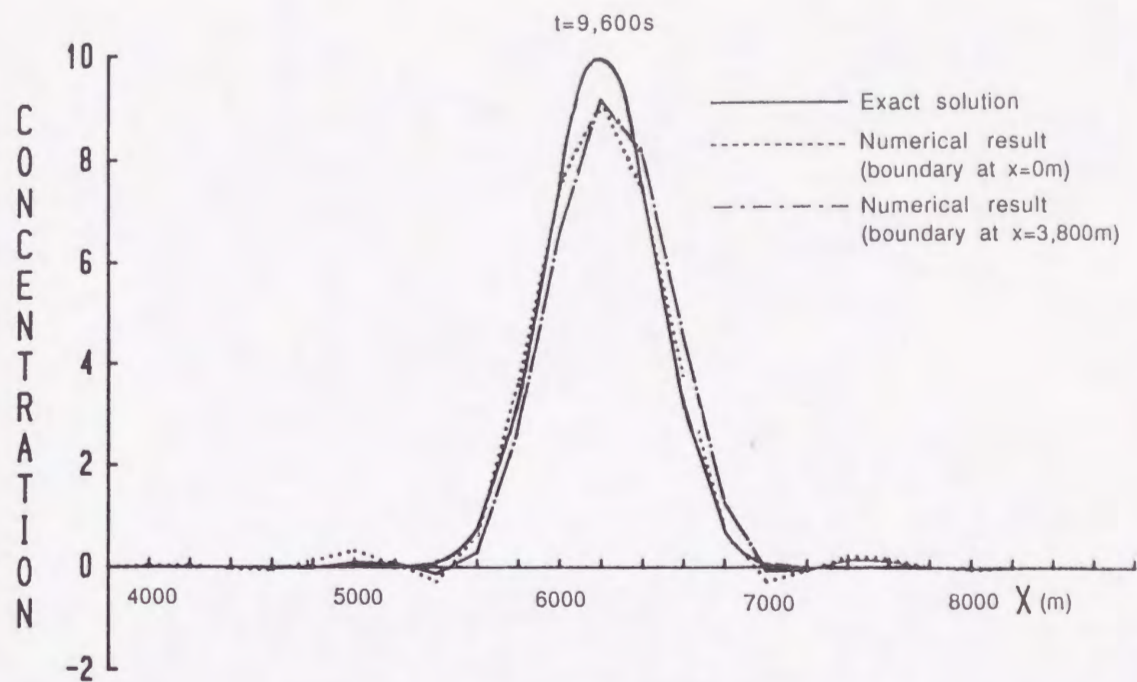


図 2 - 1 3 Gauss型濃度分布の移流計算結果

(b) 2次元の場合

図 2 - 1 4 に 2 次元問題の計算領域における境界を示す。2次元の計算領域においても、境界外において境界に沿って 2 点ずつ濃度の推定値が要求される (図 2 - 1 4)。今、 (x_i, y_j, t_n) のまわりに x に関して Taylor 級数に展開すると次式が得られる。

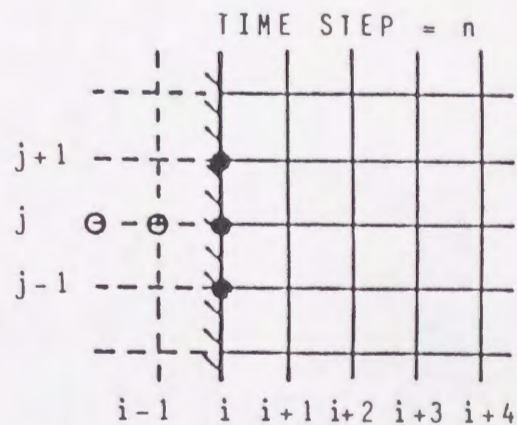


図 2 - 1 4 2次元境界領域 ($t = t_n$)

$$\begin{aligned}
 C_{i+1,j}^n &= C_{i,j}^n - 2\Delta x \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i,j,n} + \dots \\
 C_{i-1,j}^n &= C_{i,j}^n - \Delta x \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{i,j,n} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

境界において濃度は純粋移流の式を満足するとすれば次式が得られる。

$$\frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{i,j,n} + U(x_i, y_j, t_n) \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{i,j,n} + V(x_i, y_j, t_n) \frac{\partial C}{\partial y}\bigg|_{i,j,n} = 0 \quad (2.46)$$

ここで、 (x_i, y_j, t_n) のまわりに t について Taylor 級数に展開して $C_{i,j}^{n+1}$, $C_{i,j}^{n+2}$ を求め、3次以上の項を微小として無視したこれらの式を逆に $\partial C / \partial t|_{i,j,n}$, $\partial^2 C / \partial t^2|_{i,j,n}$ を未知数として連立させて解くと

$$\frac{\partial C}{\partial t}\bigg|_{i,j,n} = \frac{1}{2\Delta t} (3C_{i,j}^{n+1} - 4C_{i,j}^{n+2} + C_{i,j}^{n+3}) \quad (2.47)$$

が得られる。一方 $\partial C / \partial y|_{i,j,n}$ については中央差分をとると次のようになる。

$$\frac{\partial C}{\partial y}\bigg|_{i,j,n} = \frac{1}{2\Delta y} (C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) \quad (2.48)$$

式(2.47)、(2.48)を式(2.46)に代入し、その結果を改めて式(2.45)に代入すると境界外の濃度の推算式として

$$\begin{aligned} C_{i+1,j}^{n+1} &= \frac{\Delta x}{U} \left[\frac{1}{\Delta t} (3C_{i,j}^{n+1} - 4C_{i,j}^{n+2} + C_{i,j}^{n+3}) + \frac{V}{\Delta y} (C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) \right] + C_{i,j}^{n+1} \\ C_{i-1,j}^{n+1} &= \frac{\Delta x}{2U} \left[\frac{1}{\Delta t} (3C_{i,j}^{n+1} - 4C_{i,j}^{n+2} + C_{i,j}^{n+3}) + \frac{V}{\Delta y} (C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n) \right] + C_{i,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

が得られる。図2-14の左右が逆の場合や x 座標に沿って境界がある場合も同様の考察を行えば良い。

式(2.49)の有用性を検証するため、2次元純粋移流で境界条件の取り扱いが重要な場合のモデル計算に Six-point スキームを適用する。図2-15に示すように剛体的に角速度 $\omega = 2\pi / 12,000 \text{ sec}^{-1}$ で回転する定常流れ場を考え、初期条件として中心より 600m 離れた x , y の正負の座標軸上 4カ所に標準偏差 $\sigma_x = \sigma_y = 200\text{m}$, peak値が10の Gauss型濃度分布を与える。この計算では計算領域が図2-15からわかるように縦横 1,400m の正方形で区切られているため、濃度の輸送に境界条件が大きな役割を果たすことになる。今、純粋移流を考えているから 1/4 回転後 ($t = 3,000 \text{ sec}$) の分布は初期条件と一致しなければならない。

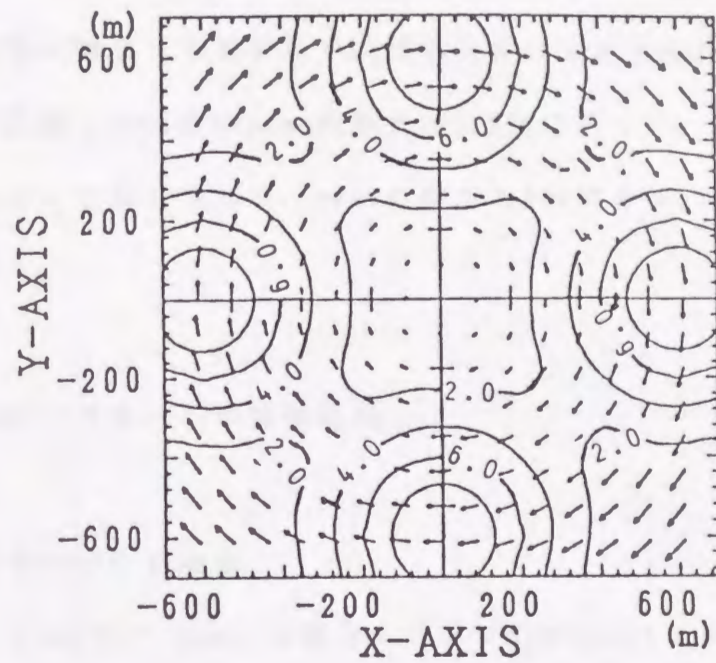


図 2 - 1 5 2次元回転流れ場(境界付近の取り扱いを考慮する場合)

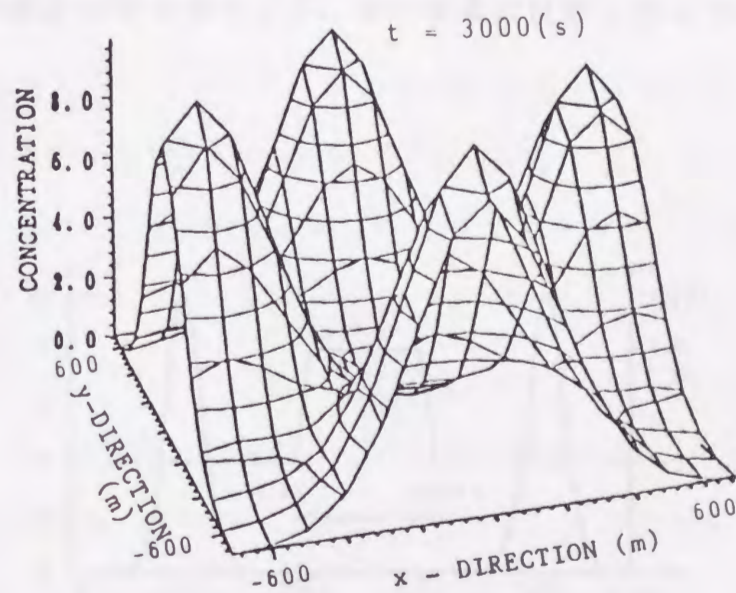


図 2 - 1 6 1 / 4 回転後の濃度分布の計算結果

$\Delta x = \Delta y = 100\text{m}$, $\Delta t = 100\text{sec}$ の計算条件のもとで式(2.33), (2.49)を用いて計算した結果を図2-16に示す。同じ条件のもとでHolly-Preissmannスキームを用いて計算した場合のpeakの誤差は1.8%であった。今回の計算結果は初期条件と十分良く一致しており、peakの誤差も1%であり、この計算法の有用性が確かめられた。

2.3.5 Six-pointスキームの拡張応用

(a) $U(x, t) \neq \text{const.}$ の場合

今までは、 $U(x, t) = \text{const.}$ の場合についてSix-pointスキームを適用し計算を行ってきたが、 $U(x, t) \neq \text{const.}$ の場合への適用も容易である。式(2.33)の $\alpha = U(x, t) \cdot \Delta t / \Delta x$ の値が $U(x, t)$ に応じて変化するだけである。例えば簡単な例として、図2-17に示すように $x = 3,200(\text{m}) \sim 4,400(\text{m})$ の区間で $U = 1(\text{m/s})$ 、他の区間では $U = 0.5(\text{m/s})$ の流速を持つ純粋移流のモデル計算を行い、 $t = 7,200(\text{s})$ の濃度分布を求めよう。他の諸量は前節と同じである。

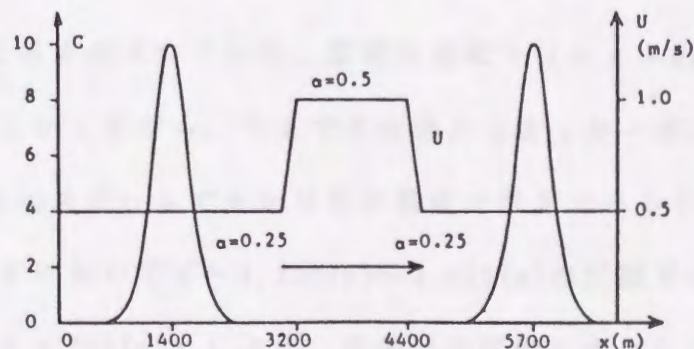


図2-17 $U \neq \text{const.}$ の場合の移流モデル計算

全領域で流速が変化せず $U = 0.5 \text{ (m/s)}$ となる場合の $t = 7,200 \text{ (s)}$ の濃度分布も共に図 2-18 に示しているが、流速の変化による顕著な変形や差異は見られず、 $U(x, t) \neq \text{const.}$ の場合も Six-point スキームによって、平均流による濃度の輸送を精度良く計算できることがわかる。

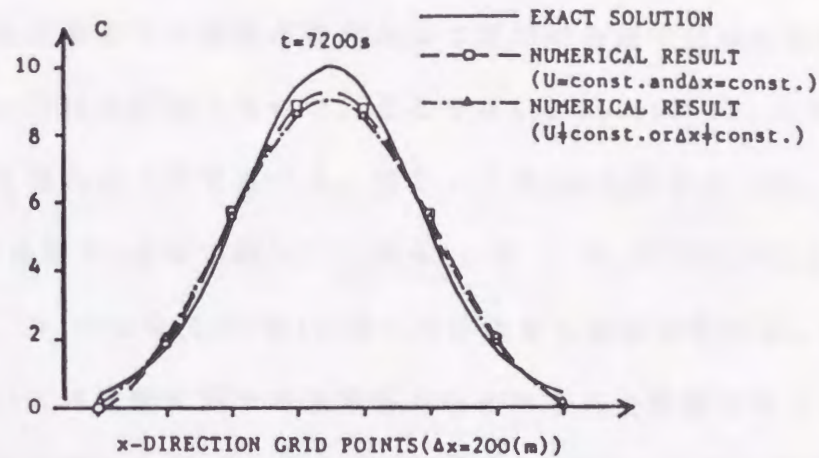


図 2-18 $U \neq \text{const.}$ の場合の移流計算結果

(b) $\Delta x(x, t) \neq \text{const.}$ の場合

実際の拡散問題を取り扱うときは計算時間の短縮を図るため、流れの状態や地形また拡散物質濃度の変化の緩急などに応じて格子間隔を変化させることが通常行われている。Six-point スキームは、その誘導の過程において $\Delta x = \text{const.}$ を前提として導き出されており、厳密な意味では $\Delta x \neq \text{const.}$ の場合については使えない。しかしながら、今までの経過から Δx が一挙に大幅に変化しない限りは Six-point スキームでもかなりの精度で計算できることが期待される。例えば図 2-17 において $x = 3,200 \text{ (m)} \sim 4,400 \text{ (m)}$ の区間で $\Delta x = 100 \text{ (m)}$ とし、他の区間では $\Delta x = 200 \text{ (m)}$ としよう。流速は全区間に渡り $U = 0.5 \text{ (m/s)} = \text{const.}$ で、他の諸量は (a) と同じである。 $\Delta x \neq \text{const.}$ の場合も $\alpha = U \cdot \Delta t / \Delta x$ の値が Δx に応じて変化するだけで、たまたま α の変化が (a) の例と一致すること

から、計算結果も図2-18に完全に一致する。この計算例からも明らかなように、 Δx が場所的に急激に大きく変化しない限りは、 $\Delta x \neq \text{const.}$ の場合においてもSix-pointスキームは十分実用的であると言えよう。

(c) 合流河川へのSix-pointスキームの適用

1次元の拡散問題のうち複雑な場合として河川の合流や分岐の問題がある。両者の取り扱い方はほぼ同じなので、ここではSix-pointスキームを河川の合流問題に適用する場合について述べる。図2-19(a)に示すように、断面積 S_1 、流速 U_1 、拡散係数 D_1 をもつ河川(I)が S_2 、 U_2 、 D_2 の河川(II)と合流(点M)して S_3 、 U_3 、 D_3 の合流河川(III)となって流出する場合を考える。河川(I)、河川(II)については濃度に関する境界条件はそれぞれ上流側で与えられるので、上流側と合流点を境界としてSix-pointスキームを用いて計算すれば良い。その際、境界の外側にそれぞれ2点ずつ仮想点が必要であるが、それらの点の濃度は式(2.43)より推定できる。一方、河川(III)の拡散を計算するためには合流点

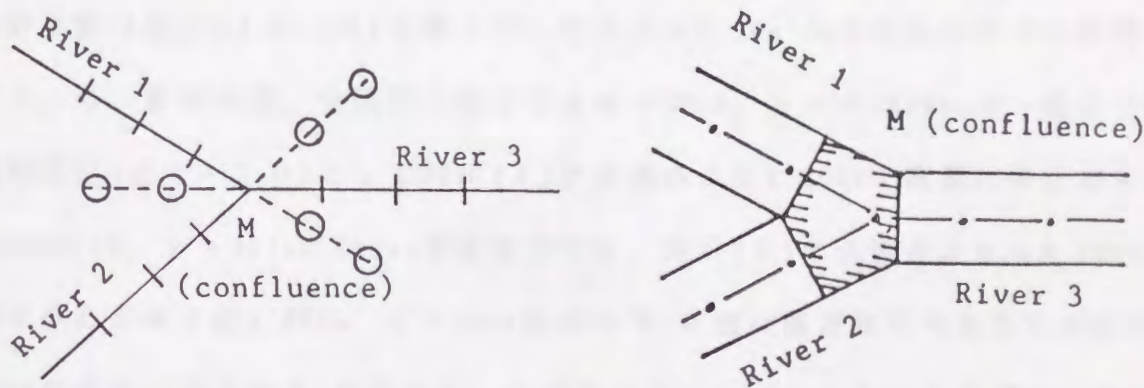


図2-19 (a) 1次元の河川の合流 (b) 合流部の模式図

Mで境界条件を与えなければならない。図2-19(b)の斜線部分で完全に混合しているものとする。拡散物質の保存則が成立するから、時刻 $t = t_0$ で

$$\begin{aligned} & \left\{ U_1 S_1 C_1(M) - S_1 D_1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial x_1} \right)_M \right\} + \left\{ U_2 S_2 C_2(M) - S_2 D_2 \left(\frac{\partial C_2}{\partial x_2} \right)_M \right\} \\ & = \left\{ U_3 S_3 C_3(M) - S_3 D_3 \left(\frac{\partial C_3}{\partial x_3} \right)_M \right\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる。ここで $C_1(M)$, $C_2(M)$ は河川(I)、河川(II)の計算から得られたM点での濃度を意味する。上式で微分を差分化して表し、 $(\partial C_i / \partial x_i)_M$ だけは $t = t_n$ では表せないので $t = t_{n-1}$ の濃度で近似すると、 $C_3(M)$ が $t = t_n$ で次式のように求まる。

$$\begin{aligned} C_3^M(M) = \frac{1}{U_3 S_3} & \left\{ U_1 S_1 C_1^M(M) + U_2 S_2 C_2^M(M) - S_1 D_1 \frac{C_1^M(M) - C_1^M(M-1)}{(\Delta x)_1} \right. \\ & \left. - S_2 D_2 \frac{C_2^M(M) - C_2^M(M-1)}{(\Delta x)_2} + S_3 D_3 \frac{C_3^{M-1}(M+1) - C_3^{M-1}(M)}{(\Delta x)_3} \right\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

河川(III)の計算においても合流点M点の外側に2点だけ濃度の仮想値が必要となるが式(2.43)より計算される。境界条件 $C_3(M)$ が与えられた以上、後の計算は容易である。

具体的な計算例として、 $U_1 = 0.5 \text{ m/s}$, $U_2 = 1.0 \text{ m/s}$, $U_3 = 1.5 \text{ m/s}$ で断面積と拡散係数は河川(I)~(III)を通じて一定で $D = 3.78 \text{ m}^2/\text{s}$ の場合のモデル計算を行う。今、簡単の為、全区間を通じて $\Delta x = 200 \text{ m}$, $\Delta t = 100 \text{ sec}$ は一定とする。初期条件(図2-20)として河川(I)に合流点より2,000m上流側に中心がある $C_{\max} = 10$, $\sigma = 264 \text{ m}$ の Gauss型濃度分布を、河川(II)に合流点よりも6,000m上流に中心がある幅1,200m, $C = 10$ の矩形分布(実際は離散値で与えるため底辺1,600mの台形分布となる)を与えた。スプリット・オペレーター・アプローチにおける移流の計算には Six-point スキーム、拡散の計算には”一般化された Crank-Nicolson の差分形式”を用いた。 $t = 4,500 \text{ sec}$, $t = 7,500 \text{ sec}$ の濃度の分布をそれぞれ図2-21, 図2-22に示す。矩形分布は拡散により滑らかな分布へと移行し、合流によって新たな濃度分布を形成する様子が良く分かる。

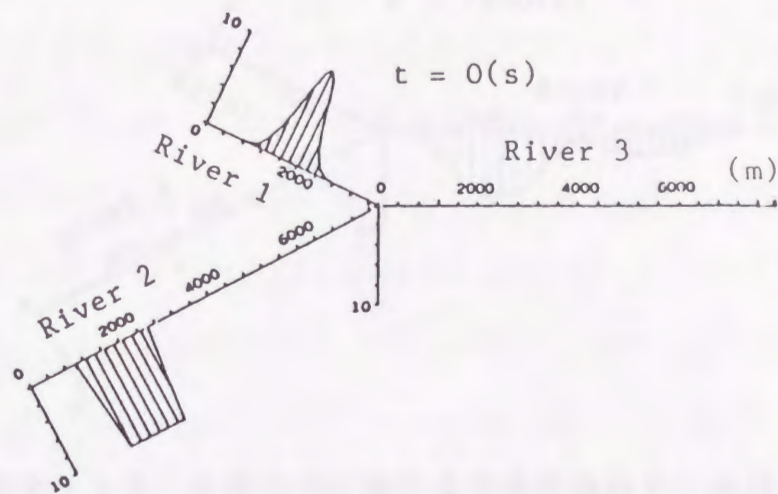


図 2 - 2 0 合流河川における移流拡散のモデル計算

初期 ($t = 0$) の濃度分布

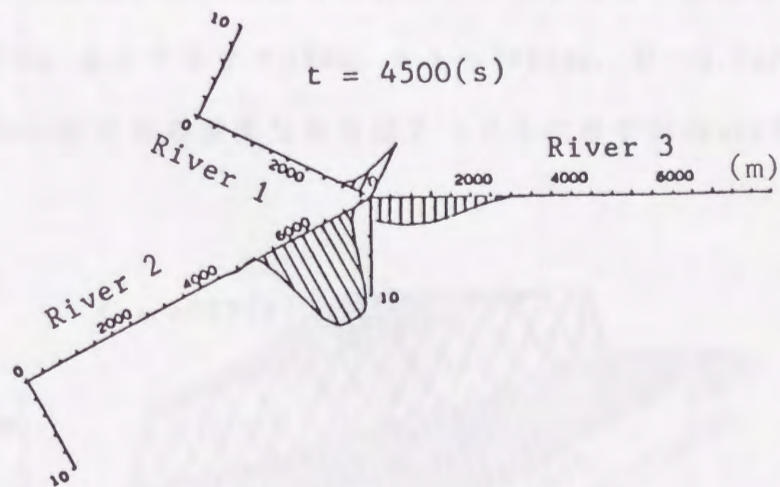


図 2 - 2 1 合流河川における移流拡散のモデル計算

$t = 4,500$ (s) の濃度分布

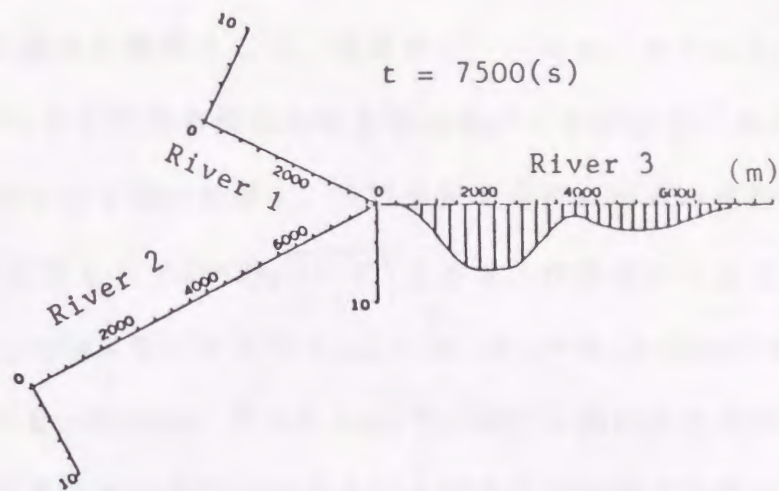


図 2 - 2 2 合流河川における移流拡散のモデル計算

$t = 7,500 (s)$ の濃度分布

(d) 不連続な濃度分布の純粹移流

Six-pointスキームは容易に2次元問題へ適用できることは前節で述べたが、ここでは、一様流速でx軸に45°の角度で流入してくる2次元水域で、数値計算にとってはより厳しいstep関数を境界条件が示すときの計算を式(2.33), (2.49)を用いて行う。 $\Delta x = \Delta y = 100m$, $\Delta t = 100sec$, $U = 0.5m/s$, $V = -0.5m/s$ で $t = 3,000sec$ のときの濃度分布を図2-23に示すがsharpな形状をほぼ維持している。

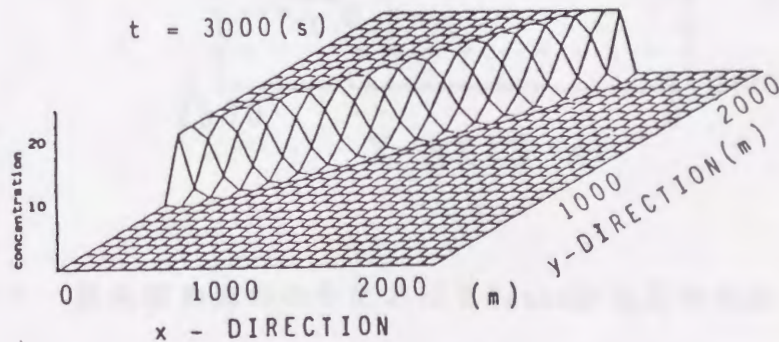


図 2 - 2 3 step状濃度分布の輸送

(e) 角をまわる流れ中の移流拡散

最後に移流拡散の計算例として、流速が $U = -ax$, $V = ay$ (ここで $a = 3 \times 10^{-4}$) で表される 2次元の流れの場を考える。これは図 2-24 に示されているように直角部を回る流れを表す。拡散係数を単純に流速の絶対値と水深 (= const.) に比例するとして $D = 20\sqrt{U^2 + V^2}$ とおき、境界条件として $t = 0$ で $x = -3,500\text{m}$, $y = 1,300\text{m}$ に中心をもち $C_{max} = 10$, $\sigma_x = \sigma_y = 200\text{m}$ である 2次元 Gauss 型濃度分布が $U = 0.5\text{m/s}$, $V = 0.0\text{m/s}$ で一様に x 軸の正の方向に流れるとき、 $x = 2,500\text{m}$ の計算領域の境界で検出される濃度分布を境界条件として input した。 $t = 3,000\text{sec}$, $t = 4,000\text{sec}$ の計算結果を図 2-24, 図 2-25 に示す。Gauss 分布は移流輸送によって変形し、乱流拡散によって拡散していく様子が良く示されている。

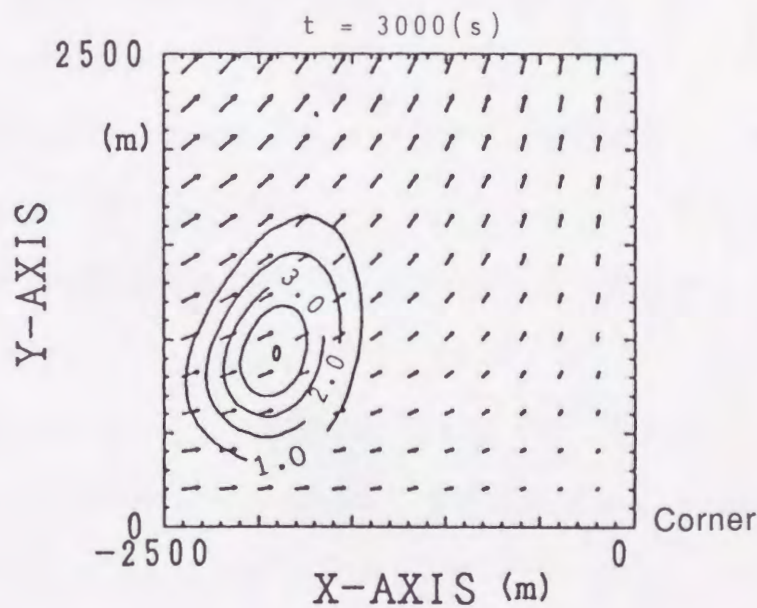


図 2-24 直角部の流れの中における Gauss 型濃度分布の移流と拡散による変形 ($t = 3,000\text{ (s)}$)

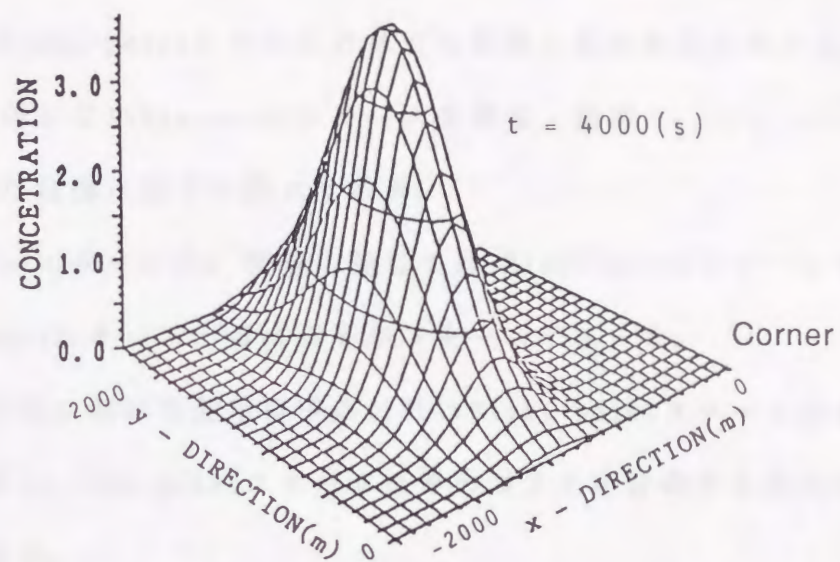


図 2 - 2 5 Gauss型濃度分布の移流と拡散の計算結果 ($t = 4,000$ (s))

2.3.6 まとめ

本章では、Eight-pointスキームとほとんど同じ精度を保ちながら、6点の格子の濃度しか用いないSix-pointスキームを開発・提案し、いくつかの結論が得られた。主要な結論は以下の通りである。

- (1) Six-pointスキームは、精度に関しては Eight-pointスキームや Holly-Preissmannスキームとほぼ同等のスキームであった。
- (2) 2次元問題における使用格子点の数はEight-pointスキームが64点であるのに対し、Six-pointスキームはそのおよそ半分の36点の格子点で計算ができた。
- (3) 2次元問題における計算は、特にHolly-Preissmannスキームと比較して大幅に簡略化できた。
- (4) 境界付近の取り扱いにおける実用上の問題は、式(2.43), (2.49)等を用いることによって解決できた。
- (5) 流速が一定でない場合や格子幅が一定でない場合においても厳密解と数値解の間に顕著な差異は見られなかった。このことは、Six-pointスキームが流速や格子幅が変わる場合にもかなりの程度有用であることを示すものであった。

以上のようにSix-pointスキームは1次元だけでなく2次元のさまざまな実際の流れ場への適用も容易であることから、移流の計算において非常に有用な計算スキームであることが明らかとなった。

2. 4 改良型Six-pointスキームの開発

2.4.1 はじめに

前節では、精度の点でも計算の容易さの点でもHolly-Preissmannスキームの短所を十分補った移流の高精度計算スキームとしてSix-pointスキームを提案した。この計算法は以下の特徴を持っていた。

- (1) 従属変数として濃度のみを取り扱っていた。
- (2) 1次元問題への適用では、その高い精度と使いやすさのため有力な計算法であった。
- (3) 2次元・3次元問題への適用も簡単であった。

しかしながら、このSix-pointスキームを多次元問題へ適用するときは、誤差の蓄積のため、1次元問題への適用と比較すると精度はかなり悪くなる。もし、2次元、3次元への適用においても高精度を期待するのであれば、Six-pointスキームに改善の余地がまだ残されていると言えるであろう。

本節では、SHASTA (Boris-Book(1973), Book et al. (1975)) で初めて紹介された人工的な修正項の付加により精度を改善する手法を応用し、Six-pointスキームの計算精度を改善することを試みる。その結果Taylor級数展開により評価された数値拡散項は、付加された人工拡散項によりほぼ完全に消去されることが明らかにされる。本節で開発・提案される改良型Six-pointスキームにより、1次元だけでなく2次元、3次元の場合の流れの純粹移流の数値計算が非常に精度良く計算できることを示す。

2.4.2 多次元問題における誤差の蓄積

ここで参考のためにSix-pointスキームを用いたGauss型濃度分布の1次元純粋移流の簡単な計算例を示す。開水路流れを考え、流速は一定で $U = 0.5\text{m/s}$ 、Gauss分布の標準偏差は $\sigma_x = 264\text{m}$ 、また $\Delta x = 200\text{m}$ 、 $\Delta t = 100\text{sec}$ とする。初期条件のGauss型濃度分布は流れにより下流に輸送されるが、 $t = 9,600\text{sec}$ の濃度分布を計算している。その計算結果を厳密解及びHolly-Preissmannスキームによる計算解と比較して図2-26に示している。前節で述べたようにSix-pointスキームはHolly-Preissmannスキームとほとんど同じ精度を保っている。

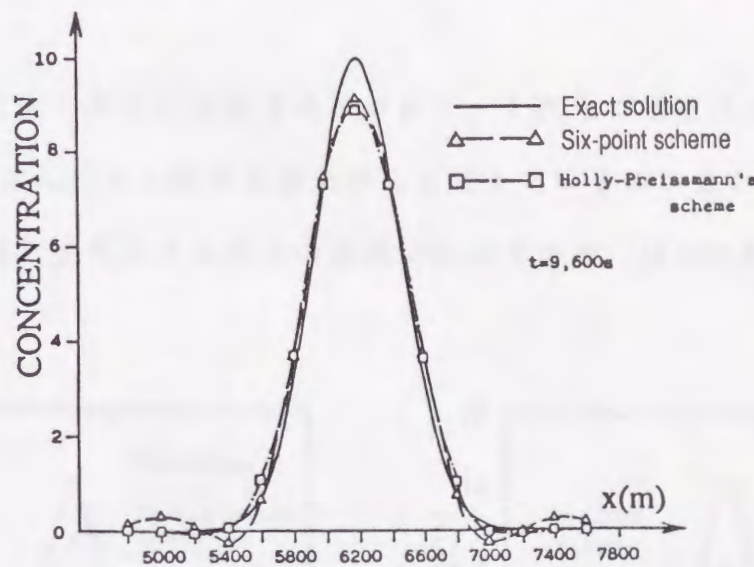


図2-26 1次元移流の計算

Six-pointスキームを2次元、3次元問題へ適用した場合の誤差の蓄積の程度を調べてみよう。2次元問題への適用例は、無限の広さをもつ2次元平面において、 $(1,400\text{m}, 1,400\text{m})$ に中心がありピーク濃度 $C = 10$ 、標準偏差 $\sigma_x = \sigma_y = 264\text{m}$ のGauss型濃度分布の純粋移流の計算である。流速は、 $U = V = 0.5\text{m/s}$ 、計

算格子は $\Delta x = \Delta y = 200\text{m}$, $\Delta t = 100\text{s}$ とし、 $9,600\text{s}$ 後の計算結果を厳密解とともに図 2-27 に示す。

3次元問題の計算においては、2次元平面で求めた各格子点での濃度を z 方向に移流させるわけであるから、 x 軸方向、 y 軸方向に移流させた後 z 軸に平行な鉛直格子軸上でそれぞれ1次元的に z 方向へ移流の計算を行えば良い。

Six-pointスキームの3次元問題における計算例として1次元、2次元のモデル計算と類似の、3次元無限空間において $(1,400\text{m}, 1,400\text{m}, 1,400\text{m})$ に中心があり、ピーク濃度 $C = 10$ 、標準偏差 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 264\text{m}$ の Gauss 型濃度分布の純粹移流の計算を行う。流速は $U = V = W = 0.5\text{m/s}$ 、計算格子は $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 200\text{m}$, $\Delta t = 100\text{s}$ とし、 $9,600\text{s}$ 後の計算結果を厳密解とともに図 2-28 に示す。

2次元、3次元と次元が増加するにつれて、1次元で精度の良かった Six-pointスキームもだんだんと顕著な誤差が生じてきているのが分かる。これは、式 (2.33) の繰り返し使用による誤差の蓄積の結果である。確かに Six-pointスキーム

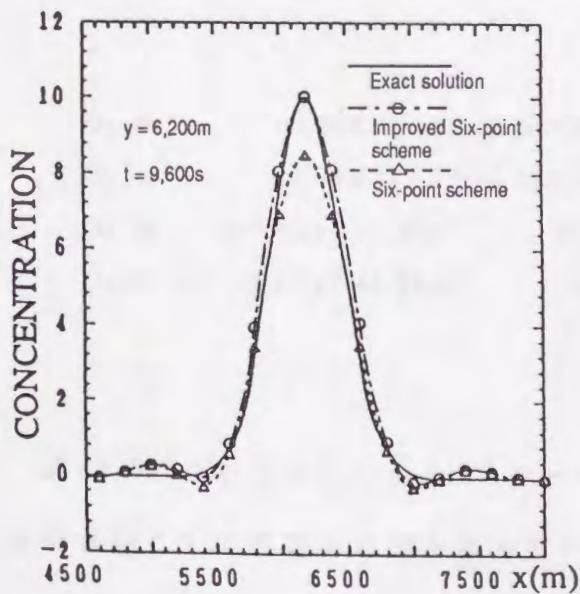


図 2-27 2次元移流の計算結果

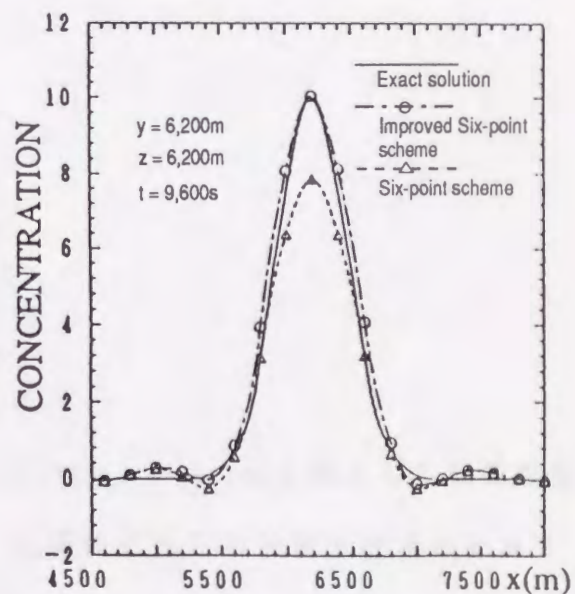


図 2-28 3次元移流の計算結果

ムは1次元問題において高精度の移流の計算を可能にし、多次元への拡張性においてもその容易さの点で優れた有力な計算法であるが、実際の多次元の問題への適用に際しては、より高精度で実用的な計算スキームが望ましい。

2.4.3 改良型Six-pointスキームの誘導

(a) 改良型Six-pointスキームの定式化

1次元の純粋移流方程式(2.9)において $U = \text{const.}$ ならば、濃度の時間微分は濃度の空間微分と以下のように関係づけられる。

$$\frac{\partial^k C}{\partial t^k} = (-U)^k \frac{\partial^k C}{\partial x^k} \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (2.52)$$

式(2.52)を用いてSix-pointスキームの式(2.33)をTaylor級数解析すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} &= D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2! \Delta t} + D_3 \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3! \Delta t} \\ &+ D_4 \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \frac{(\Delta x)^4}{4! \Delta t} + D_5 \frac{\partial^5 C}{\partial x^5} \frac{(\Delta x)^5}{5! \Delta t} + \dots \end{aligned} \quad (2.53)$$

ここで

$$\begin{aligned} D_2 &= -3.16 \times 10^{-2} \alpha^2 + 3.16 \times 10^{-2} \alpha \\ D_3 &= 4.74 \times 10^{-2} \alpha^2 - 4.74 \times 10^{-2} \alpha \\ D_4 &= -\alpha^4 + 2\alpha^3 - 2.26\alpha^2 + 1.26\alpha \\ D_5 &= \alpha^5 - 2.83\alpha^3 + 4.83\alpha^2 - 3.0\alpha \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

式(2.53)の右辺はSix-pointスキームのtruncation errorと関連し、数値拡散を引き起こして誤差の原因となっている。右辺のこれらの数値拡散項のそれぞれの特徴を明らかにするため、各項を1つずつ取り出して拡散の数値計算を行

った。式(2.53)を詳細に解析し、また多くの数値実験を行った結果、図2-29、図2-30に示すように、右辺第1項の2次の数値拡散項は通常の乱流拡散や移流分散と同様のdampingの性質を持ち、右辺第2項の3次の数値拡散項は位相誤差を生じさせて歪を引き起こすことが分かった。

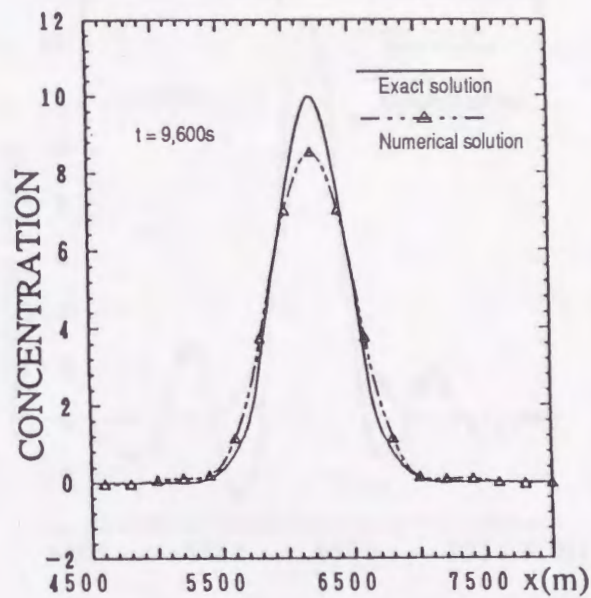


図2-29 式(2.53)右辺の第1項(2次の拡散項)の特性

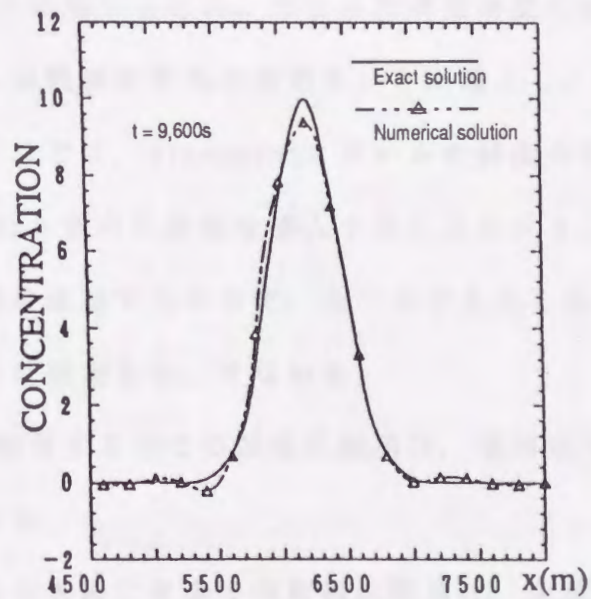


図2-30 式(2.53)右辺の第2項(3次の拡散項)の特性

また、右辺第3項の4次の数値拡散項は図2-31に示すように、振幅の増幅と高波数の振動を引き起こした。一方、図には示していないが、5次の数値拡散項は3次とは逆方向へ位相誤差と歪を生じさせた。

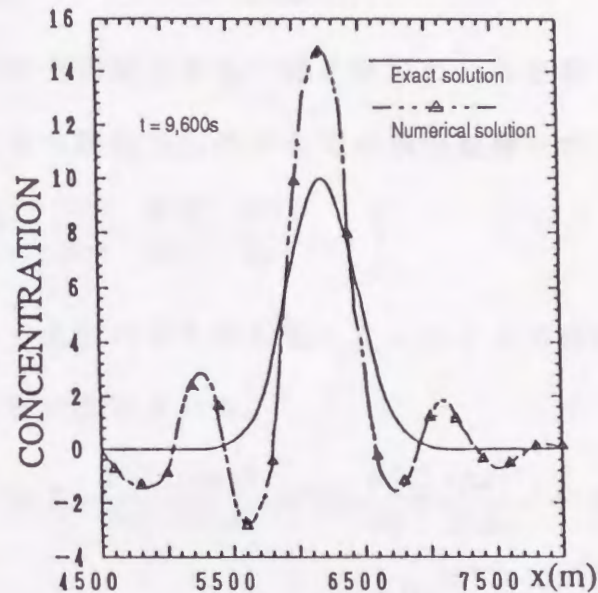


図2-31 式(2.53)右辺の第3項(4次の拡散項)の特性

Six-pointスキームを用いるとき、できるだけ高精度を維持するためには、式(2.53)右辺のこれらの数値拡散項の効果を何とか減らし、できればゼロにしなければならない。ここでは、Six-pointスキームの精度の向上を図るため式(2.53)右辺と打ち消し合う負の拡散項を導入することにする。ところで、式(2.53)の右辺の誤差項は無級数であるので、全ての項を差し引くことは不可能である。そこで次のように仮定した。すなわち、

- (1) damping誤差に寄与する全ての数値拡散項は、筆頭項である2次の数値拡散項で代表できる。
- (2) 位相誤差や歪を引き起こす全ての数値拡散項は、準筆頭項である3次の数値拡散項で代表できる。

式(2.53)右辺が無級数であることを考慮するため、それぞれの項の積で表される補正係数を導入して、Six-pointスキームの全補正項を次のような形で表すことにする。

$$\gamma D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2! \Delta t} + a D_3 \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3! \Delta t}$$

ここで、 a は 3 次の空間微分をもつ補正項のための定数係数で、 γ は式(2.53)右辺における 3 次の空間微分以外の全ての項の影響を含む係数となる：

$$\gamma = \text{function} \left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \frac{\partial^4 C}{\partial x^4}, \frac{\partial^5 C}{\partial x^5}, \dots \right)$$

式(2.53)右辺から上記の項を差し引くことによって純粋移流の数値計算の精度が改善されることが期待される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = & D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2! \Delta t} + D_3 \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3! \Delta t} + D_4 \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \frac{(\Delta x)^4}{4! \Delta t} + \dots \\ & - \gamma D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2! \Delta t} - a D_3 \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3! \Delta t} \end{aligned} \quad (2.54)$$

式(2.54)は次式のように書き直される。

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} = C_i^n = & b_1 C_{i-3}^n + b_2 C_{i-2}^n + b_3 C_{i-1}^n + b_4 C_i^n + b_5 C_{i+1}^n + b_6 C_{i+2}^n \\ & - \gamma D_2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - a D_3 \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} \end{aligned} \quad (2.55)$$

改良されたSix-pointスキームを陽的な計算法として保持するために、2次と3次の微分は時間 $t = t_n$ において差分化し、 $x = x_{i-1}$ と $x = x_{i+1}$ の間でクーラシオン数 α によって荷重平均したものをを用いた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} &= \frac{\alpha}{2} (C_i^n - 2C_{i-1}^n + C_{i-2}^n) + \frac{1-\alpha}{2} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \\ \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} &= \frac{\alpha}{12} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + 2C_{i-2}^n - C_{i-3}^n) + \frac{1-\alpha}{12} (C_{i+2}^n - 2C_{i+1}^n + 2C_{i-1}^n - C_{i-2}^n) \end{aligned}$$

最後に、残された補正係数 γ と a を決定する。 γ の値は正の拡散(振幅の減衰)や負の拡散(振幅の増幅)に強く関係している。それぞれの数値拡散項の特性を詳細に検討し、変数の組み合わせを最も簡単なものについていくつか考慮した結果、 γ の式が以下のように決定された。

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\omega}{|\omega|} & (\omega \neq 0) \\ 0 & (\omega = 0) \end{cases} \quad (2.56)$$

ここで

$$\omega = -\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} \frac{\partial^5 C}{\partial x^5}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1} - C_i - C_{i-1} + C_{i-2}}{2(\Delta x)^2},$$

$$\frac{\partial^4 C}{\partial x^4} = \frac{C_{i+2} - 3C_{i+1} + 2C_i + 2C_{i-1} - 3C_{i-2} + C_{i-3}}{2(\Delta x)^4},$$

$$\frac{\partial^5 C}{\partial x^5} = \frac{C_{i+2} - 5C_{i+1} + 10C_i - 10C_{i-1} + 5C_{i-2} - C_{i-3}}{(\Delta x)^5}$$

ω がゼロでないときは、 γ は +1 か -1 の値をとり、付加した 2 次の微分の項が数値誤差を打ち消すように作用させるという重要な役割をもつ。時間 t_n における全ての格子点の濃度は既知であるから、 ω の式の中の微分は時間 t_n で容易に差分化できる。上述の係数 γ を用いて多くの数値実験を行った結果、 a は近似的に次の値をとるときが最も精度が良いことが分かった。

$$a = 0.275 \quad (2.57)$$

ところで Von Neumann の安定解析によれば、ある波長の範囲で式 (2.55) の増幅ファクターは 1 を僅かに超えていることが分かった。この不安定性は 2 次微分の補正項に原因があると考えられる。したがって、2 次微分の補正項に乗ずる減衰ファクター S_1 を導入した。 S_1 は計算の繰り返し回数が増加するとともに小さくなる必要がある。詳細な考察と多くの数値実験により S_1 を次式のように決定した。

$$S_f = \frac{23.6}{(n+18.7)^{0.758}} \quad (2.58)$$

最終的に、増幅ファクターは全ての波長の範囲で1以下の値となった。

以上の計算式を1つにまとめた最終的な代数的表現式を次に示す。

$$C_i^{n+1} = b'_1 C_{i-3}^n + b'_2 C_{i-2}^n + b'_3 C_{i-1}^n + b'_4 C_i^n + b'_5 C_{i+1}^n + b'_6 C_{i+2}^n \quad (2.59)$$

(改良型Six-pointスキーム)

ここに

$$\begin{aligned} b'_1 &= b_1 + \frac{\alpha a}{12} D_3 \\ b'_2 &= b_2 - \frac{\alpha \gamma S_f}{2} D_2 - \frac{(-1+3\alpha) a}{12} D_3 \\ b'_3 &= b_3 - \frac{(1-3\alpha) \gamma S_f}{2} D_2 - \frac{(1-\alpha) a}{6} D_3 \\ b'_4 &= b_4 - \frac{(-2+3\alpha) \gamma S_f}{2} D_2 + \frac{\alpha a}{6} D_3 \\ b'_5 &= b_5 - \frac{(1-\alpha) \gamma S_f}{2} D_2 - \frac{(-2+3\alpha) a}{12} D_3 \\ b'_6 &= b_6 - \frac{(1-\alpha) a}{12} D_3 \end{aligned}$$

式(2.59)を改良型Six-pointスキームと名付けることにする。

(b) モデル計算とその評価

前述のオリジナルなSix-pointスキームで行ったのと同様の条件で、前節で求めた改良型Six-pointスキームについて、1次元、2次元、3次元の場合のモデル計算を行った。1次元問題への適用で得られた結果を図2-32に示す。数値解は厳密解に良く一致している。ピーク濃度のdampingだけでなく、負の濃度も改善されている。さらに、位相誤差も全く現れていない。また、1次元移流計算の中で、より条件の厳しい、不連続部分をもった台形濃度分布のときの同様な純粋移流への適用例でも良好な結果を得ている。

2次元、3次元問題における改良型Six-pointスキームの計算結果を図2-27, 図2-28にそれぞれ示している。改良型Six-pointスキームにより非常に正確な計算結果が得られており、厳密解とも良く一致している。このスキームでは、damping誤差の消去に関しては大幅な改善が見られ、負の濃度の減少についても僅かながら成功している。

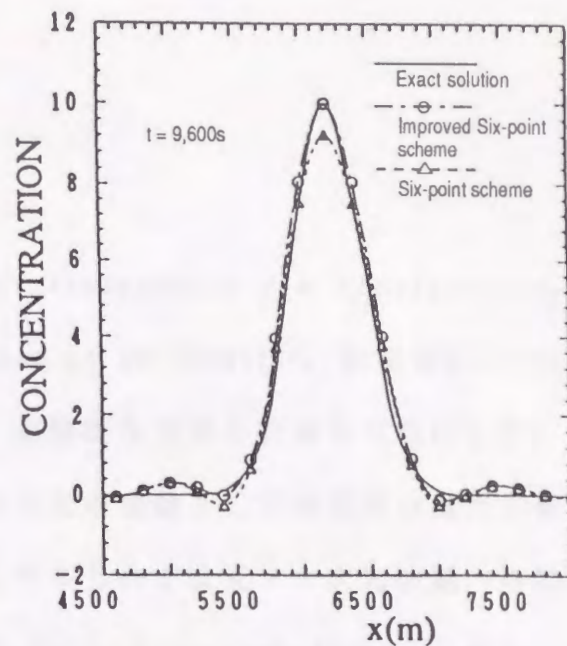


図2-32 1次元移流の計算

2.4.4 まとめ

Six-pointスキームをTaylor級数解析することにより明らかとなった数値拡散項を消去するための補正項の導入によって格段に精度の向上した改良型Six-pointスキームを開発することができた。このスキームを適用することにより、1次元だけでなく、2次元、3次元の移流問題も精度良く計算できるようになったため、拡散の計算において例えばCrank-Nicolsonのスキームなどを併用したSplit operator approachを採用すれば、貯水池や河口等における物質拡散の数値計算が、高精度でかつ容易に実行できることになる。

2. 5 SOWMACスキームの開発

2.5.1 はじめに

特性曲線法に基づいて提案されたHolly-Preissmannスキーム (Holly-Preissmann(1977)) やSix-pointスキーム (Komatsu et al.(1985))、改良型Six-pointスキーム (Komatsu et al.(1989)) は、高精度な移流の計算を可能にした。しかしながら、Holly-Preissmannスキームは従属変数として濃度及び濃度勾配を用いており、それらの移流計算を必要とするため2次元・3次元問題への拡張が非常に煩雑となる (Glass-Rodi(1982), Holly-Usseglio(1984))。また、Six-pointスキームや改良型Six-pointスキームは、従属変数として濃度のみを移流させるため多次元への拡張は簡単であるが、計算格子点を6点用いているため境界付近における取り扱いがやや面倒になる。純粋移流のための計算法として、多次元への拡張が容易で、かつ、境界付近の取り扱いも簡単な新しい高精度計算スキームの開発が緊急な課題となっている。

本節では、精度や安定性に優れた2階導関数の差分の特性に着目し、1階の移流方程式の代わりに2階の波動方程式を解くという新しい概念を用いて、従来の問題点を解消した移流のための新しい高精度計算スキームの開発について述べる。

2.5.2 SOWMACスキームの誘導

(a) 2階の波動方程式の導入

簡単のために1次元の純粋移流方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.60)$$

を考える。後述するように1次元から2次元・3次元問題への展開は容易である。

スプリット・オペレーター・アプローチにおける拡散の計算は、Crank-Nicolsonスキーム等種々の計算法によって比較的精度良く計算ができる。このことから、2階の導関数の数値計算は安定で精度の良いものであることが示唆される。一方、純粋移流の計算、つまり、1階の導関数の数値計算はたびたび発散や数値分散を引き起こす。したがって、式(2.60)を t で微分した式と式(2.60)を x で微分した式から得られる2階の波動方程式

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - U^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0 \quad (2.61)$$

は数値計算上、式(2.60)よりもはるかに有利であることが期待される。ただし、ここで流速 U は近似的に一定としている。

式(2.61)の解はdynamic waveで、下流に伝播する前進波と上流へ伝播する後退波の重ね合わせである。一方、式(2.60)の解は下流へのみ伝播する前進波である。したがって式(2.60)の代わりに式(2.61)を解く場合は、解として前進波のみが得られるような条件を強制的に与えてやらなければならない。

(b) 2 階の波動方程式の差分化

式(2.61)の差分式は数多く考えられるが、 $x = x_i$ を中心として空間的に左右対称な形のスキームを用いると、計算結果に左右非対称な歪みが生じる。これは、移流という現象が上流から下流へ向かって伝わる一過性の左右非対称な輸送形態であることに起因している。そこで、左右非対称な計算スキームを採用することにし、上流側の情報量が多く取り入れられるように工夫を行った。

この空間的に左右非対称な差分スキームはimplicit形式となり、クーラン数を $\alpha (\equiv U\Delta t/\Delta x)$ とすれば以下のように表わされる(図2-33)。

$$(1-\kappa)(C_{i+1}^{n+1}-2C_{i+1}^n+C_{i+1}^{n-1})+\kappa(C_i^{n+1}-2C_i^n+C_i^{n-1}) - \alpha^2\{\theta(C_{i+1}^{n+1}-2C_{i+1}^n+C_{i+1}^{n-1})+(1-\theta)(C_{i+1}^n-2C_i^n+C_{i-1}^n)\}=0 \quad (2.62)$$

ここで、 κ 、 θ はそれぞれ空間及び時間に関する重みである。

このスキームを用いて移流の計算を試みた結果、重み κ と θ の適切な組み合わせを用いれば高い精度の計算が可能なが分かった。このスキームは既知量として n 及び $(n-1)$ タイムステップの濃度を必要とし、この2つのタイムステップの条件の与え方次第で1方向の伝播波のみを再現することができる。例えば、 $t = -\Delta t$ と $t = 0$ で、波が下流にのみ伝わるような初期

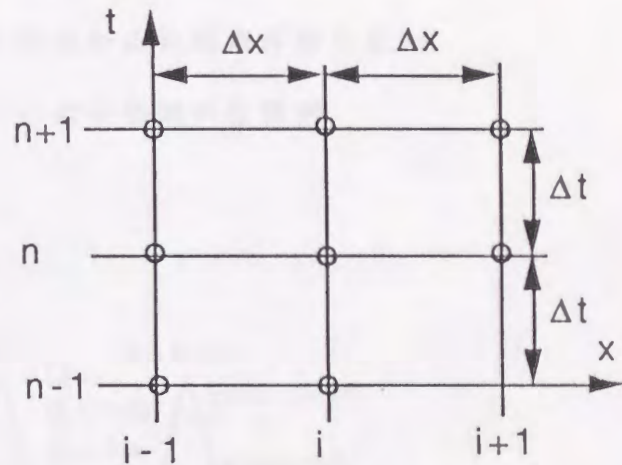


図2-33 1次元計算格子

条件を与えると図2-34に示すように下流側に向けて移流の計算が精度良く行える。一方、 $t = -\Delta t$ と $t = 0$ で全く同じ濃度分布を初期条件として与えると図2-35のように2つの波が上下流へ伝わる結果が得られる。したがって、波が下流へのみ伝えられるような条件を $(n-1)$ ステップと n ステップで容易

に与えることが可能ならば問題ないが、 $(n-1)$ ステップと n ステップの条件の間で整合性がとれていない場合、図2-35のように不必要な波の成分が上流へ伝播することになる。

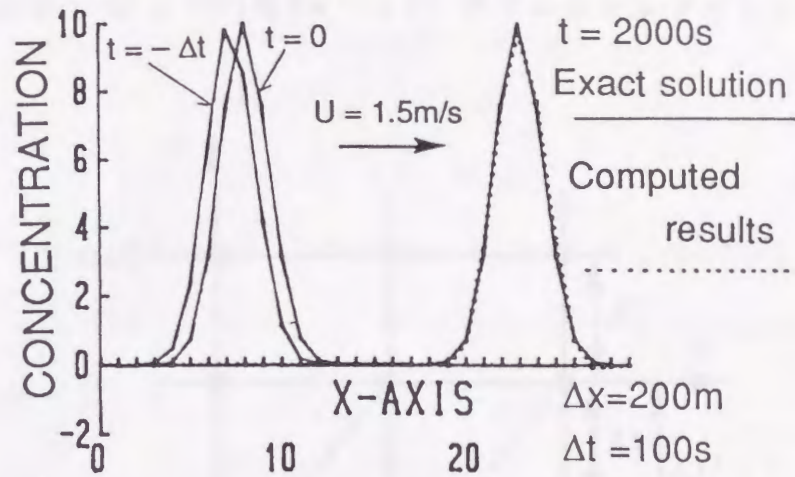


図2-34 濃度分布が下流へのみ伝わる初期条件を与えたときの差分式(2.62)による移流の計算例

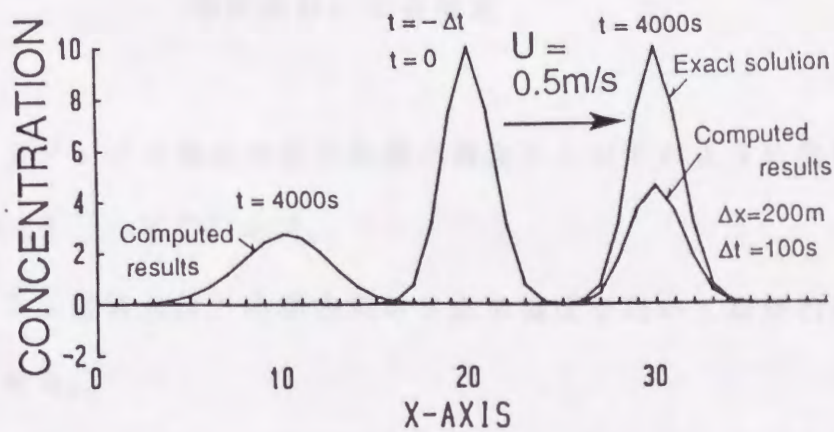


図2-35 $t=0$ と $t=-\Delta t$ で同一の初期濃度分布を与えたときの差分式(2.62)による計算例(上下流へ波が伝播)

この問題を解決するために、図 2-36 に示すように $(n-1)$ ステップの濃度の代わりに $(n-1)'$ ステップの濃度を用いることにする。ここでは、与えられた格子幅、流速の下で (i, n) 、 $(i+1, n)$ の格子点を下流側へ向かって通過する特性曲線を考え、これらの特性曲線がそれぞれ $(i-1)$ 軸、 i 軸を横切る時刻 $(n \Delta t - \Delta x / U)$ を $(n-1)'$ タイムステップとした。

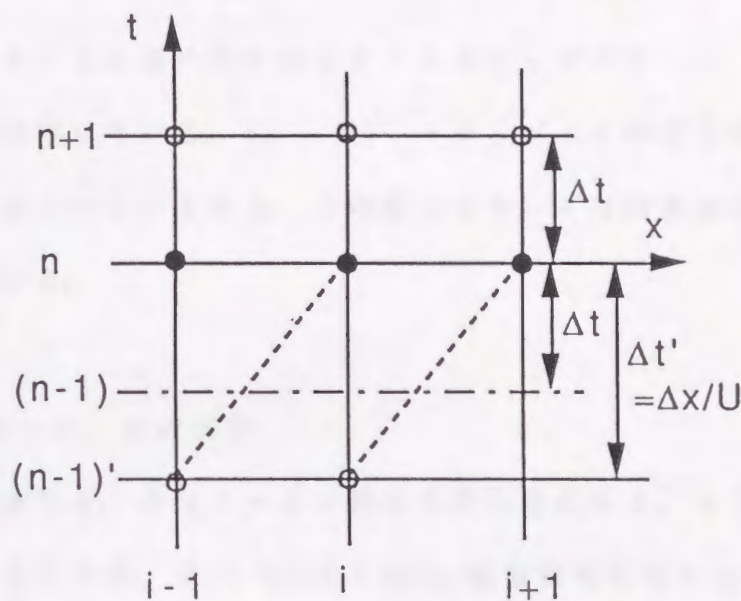


図 2-36 前の時間ステップ $(n-1)'$ における濃度の特性曲線による推定

$(n-1)'$ ステップの濃度は特性曲線の概念から以下のように求められる。

$$C_{i-1}^{(n-1)'} = C_i^n, \quad C_i^{(n-1)'} = C_{i+1}^n$$

時間に関する 2 階微分は、時間方向の 3 点の濃度を用いて最終的に次式の差分式で近似できる。

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right|_{i-1} = \frac{1}{\Delta t^2} (b_1 C_{i-1}^n + b_2 C_i^n + b_3 C_i^n)$$

$$\left. \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right|_i = \frac{1}{\Delta t^2} (b_1 C_i^n + b_2 C_i^n + b_3 C_{i+1}^n)$$

ここで、

$$b_1 = \frac{2\alpha}{\alpha+1}, \quad b_2 = -2\alpha, \quad b_3 = \frac{2\alpha^2}{\alpha+1}$$

である。

式(2.62)の差分式は新たに次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & 2(1-\kappa)\{C_{i+1}^{n+1} - (\alpha+1)C_{i+1}^n + \alpha C_i^n\} + 2\kappa\{C_i^{n+1} - (\alpha+1)C_i^n + \alpha C_{i-1}^n\} \\ & = \alpha(\alpha+1)\theta(C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + \alpha(\alpha+1)(1-\theta)(C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (2.63)$$

式(2.63)のスキームは最終的には n タイムステップの C_{i-1} , C_i , C_{i+1} だけを既知量として使用している。 $(n-1)$ ' ステップの C の値を流速 U に乗った特性曲線から求めていることから、この差分スキームは前進波のみを計算の対象とすることになる。

(c) パラメーター κ , θ の決定

式(2.63)の最適な κ , θ はクーラン数 α と共に変化する。 κ と θ の α に関する関数形を求めるために、式(2.63)に Taylor 級数解析を用いると、最終的に以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - U^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = & [(4-6\kappa)\alpha - 6(\theta+\kappa-1)\alpha^2 + (2-6\theta)\alpha^3] \frac{\Delta x^3}{3! \Delta t^2} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \\ & + [4(\kappa-1)\alpha + 2(6\kappa-5)\alpha^2 + 4(3\theta+2\kappa-2)\alpha^3 + 2(6\theta-1)\alpha^4] \frac{\Delta x^4}{4! \Delta t^2} \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (2.64)$$

式(2.64)の右辺が式(2.63)のスキームの打ち切り誤差である。この誤差項は無限級数であり、これをゼロにすることができれば厳密な計算が可能である。現実にはそれは不可能であるので、誤差項をトータルとしてできるだけ小さくするように κ と θ を決めることが望ましい。式(2.64)右辺の各項の係数は、artificial dispersion coefficient と呼ばれる。このうちの筆頭項と準筆頭項である 3 次、4 次の項の artificial dispersion coefficient の大きさを評価するた

めにこれらの項の2乗をとり、 J_3 、 J_4 とおく。

$$J_3 = [(4-6\kappa)\alpha - 6(\theta + \kappa - 1)\alpha^2 + (2-6\theta)\alpha^3]^2 \quad (2.65)$$

$$J_4 = [4(\kappa - 1)\alpha + 2(6\kappa - 5)\alpha^2 + 4(3\theta + 2\kappa - 2)\alpha^3 + 2(6\theta - 1)\alpha^4]^2 \quad (2.66)$$

この J_3 、 J_4 を最小にする条件は、これらの式を κ もしくは θ で偏微分してゼロとおくことにより以下のように求められる。

$$\alpha + 2 - 3\kappa - 3\alpha\theta = 0 \quad (2.67)$$

$$(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2(2\alpha + 1)\kappa - 6\alpha^2\theta = 0 \quad (2.68)$$

式(2.67)、(2.68)を連立させて解くことにより J_3 、 J_4 を最小にするパラメータ κ 、 θ の関数形が求まる。

$$\kappa = \frac{\alpha + 2}{2} = 0.5\alpha + 1 \quad (2.69)$$

$$\alpha\theta = \frac{-(\alpha + 2)}{6} = -0.1666\alpha - 0.3333 \quad (2.70)$$

式(2.69)、(2.70)の理論解は5次以降の誤差項を考慮していないために、若干の修正が必要であると思われる。そこで、式(2.63)を用いた移流の数値実験を数多く行い、 κ 、 θ の最適値を試算的に求めた。得られた結果と式(2.69)、(2.70)を図2-37に示す。

最適値と理論解はほぼ一致しているが、わずかのずれが見られる。これは前述のように理論解の算出の際、5次以降の高次の項の影響を考慮に入れていないためである。したがって、試算的に得られた κ 、 θ の最適値から、式(2.69)、(2.70)を基本として若干の補正を加えて最終的な関数形を求めることにする。その際、式(2.63)より $\alpha = 1$ で $\kappa + \theta = 1$ が成り立つという条件を付加して最小2乗法により求めると、パラメータ κ 、 θ が決定され次のようになる。

$$\kappa = 0.5155\alpha + 0.9688 \quad (2.71)$$

$$\alpha\theta = -0.1691\alpha - 0.3152 \quad (2.72)$$

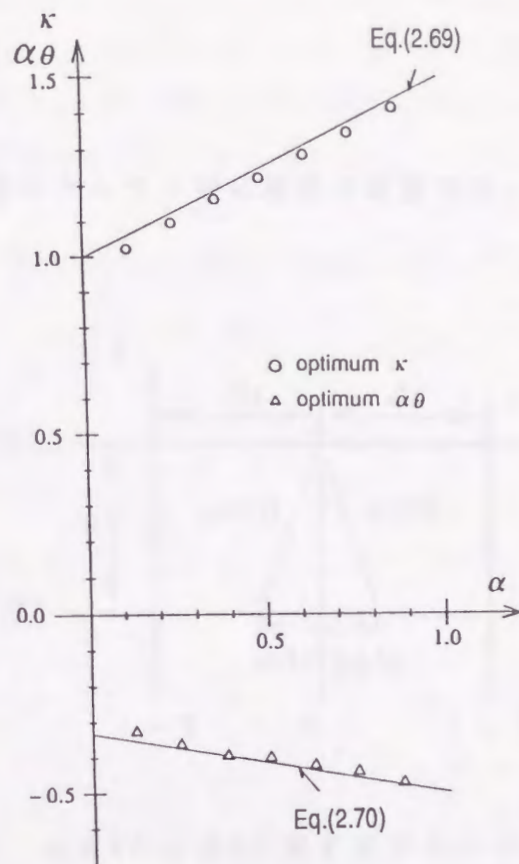


図 2-37 κ , θ とクーラン数 α の関係

(d) SOWMACスキーム

前節で、パラメーター κ , θ の最適値が式 (2.71), (2.72) のように求められたので、移流計算スキームの最終形が決定できる。

ところで、これまではクーラン数 α は $0 \leq \alpha \leq 1$ の範囲にあることを前提として話を進めてきたが、実際の自然現象では、潮汐流、局所流等クーラン数 α が負になるケースが多く見られる。図 2-38 に示すように、 α の正負に関し $x = x_1$ を中心としてスキームは左右対称であることから、式 (2.63) において

$$\begin{aligned}
 i-1 &\longrightarrow i+1 \\
 i+1 &\longrightarrow i-1 \\
 \alpha &\longrightarrow |\alpha|
 \end{aligned}$$

とおくことにより、負のクーラン数に対する計算スキームが求められる。

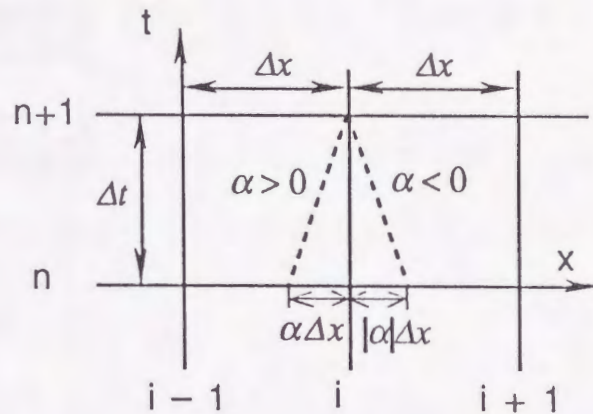


図 2-38 $\alpha \geq 0$ と $\alpha \leq 0$ に関するスキームの対象な性質

1次元純粋移流方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

に対する最終的な計算スキームが正負の α に対して統一された形で以下のよう
に求められる。

$$p_1 C_{i-1}^{n+1} + p_2 C_i^{n+1} + p_3 C_{i+1}^{n+1} = p_4 C_{i-1}^n + p_5 C_i^n + p_6 C_{i+1}^n \quad (2.73)$$

(SOWMACスキーム)

ここに、

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0.3776\alpha_{0+} + 0.3152\alpha_{0-} - 0.5467\alpha_{1+} + 0.4843\alpha_{1-} + 0.1691\alpha^2 \\
p_2 &= 1.3072 \qquad \qquad \qquad + 0.0624|\alpha| \qquad \qquad \qquad - 0.3382\alpha^2 \\
p_3 &= 0.3152\alpha_{0+} + 0.3776\alpha_{0-} + 0.4843\alpha_{1+} - 0.5467\alpha_{1-} + 0.1691\alpha^2 \\
p_4 &= 0.3776\alpha_{0+} + 0.3152\alpha_{0-} + 0.5157\alpha_{1+} - 0.4533\alpha_{1-} + 0.1381\alpha^2 \\
p_5 &= 1.3072 \qquad \qquad \qquad - 0.0624|\alpha| \qquad \qquad \qquad - 0.2762\alpha^2 \\
p_6 &= 0.3152\alpha_{0+} + 0.3776\alpha_{0-} - 0.4533\alpha_{1+} + 0.5157\alpha_{1-} + 0.1381\alpha^2
\end{aligned}$$

$$\alpha_{0+} = \text{AINT} \left\{ \frac{\alpha+1}{|\alpha|+1} \right\}$$

$$\alpha_{0-} = \text{AINT} \left\{ \frac{1-\alpha}{1+|\alpha|} \right\}$$

$$\alpha_{1+} = \frac{|\alpha| + \alpha}{2}$$

$$\alpha_{1-} = \left| \frac{\alpha - |\alpha|}{2} \right|$$

$$\alpha = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$$

ここで、AINTはFORTRANで用いられる小数切り捨ての組み込み関数である。

この式(2.73)を本研究で提案する最終的な計算スキームとする。以下、このスキームをSOWMACスキーム(Second Order Wave equation Method for Advective Calculation)と呼ぶことにし、次節以降で安定性、精度の検証、またその応用例について述べる。

(e) 安定解析

前項で提案したSOWMACスキームについて、Von Neumannの安定解析(Cunge et al.(1986), Baptista et al.(1985))によってその特性を調べる。

1) 増幅係数に関する解析

式(2.60)の解をフーリエ級数で表わせれば次式のようなになる。

$$C(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\{-j\sigma_m t\} \exp\{jk_m x\} \quad (2.74)$$

ここで、 σ_m 、 k_m はそれぞれ m 番目の波の成分の角周波数、波数であり、 j は虚数単位 ($j = \sqrt{-1}$) である。基礎方程式 ((2.60) 式) が線形であることから、解の重ね合わせの原理が成立する。したがって任意の波の成分

$$C(x, t) = A \exp\{-j\sigma t\} \exp\{jkx\} \quad (2.75)$$

も解の1つとなり式 (2.60) を満足する。簡単のためクーラン数 α を正とし、式 (2.75) を式 (2.73) の SOWMAC スキームに代入し整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} e^{-j\sigma\Delta t} &= \frac{p_4 e^{-jk\Delta x} + p_5 + p_6 e^{jk\Delta x}}{p_1 e^{-jk\Delta x} + p_2 + p_3 e^{jk\Delta x}} \\ &= \frac{B_3 + jB_4}{B_1 + jB_2} \end{aligned} \quad (2.76)$$

したがって、SOWMAC スキームの増幅係数は次のように表される。

$$|G| = |e^{-j\sigma\Delta t}| = \sqrt{\left(\frac{B_1 B_3 + B_2 B_4}{B_1^2 + B_2^2}\right)^2 + \left(\frac{B_1 B_4 - B_2 B_3}{B_1^2 + B_2^2}\right)^2} \quad (2.77)$$

ここに、

$$\begin{aligned} B_1 &= p_1 \cos k\Delta x + p_2 + p_3 \cos k\Delta x \\ B_2 &= -p_1 \sin k\Delta x + p_3 \sin k\Delta x \\ B_3 &= p_4 \cos k\Delta x + p_5 + p_6 \cos k\Delta x \\ B_4 &= -p_4 \sin k\Delta x + p_6 \sin k\Delta x \end{aligned}$$

この増幅係数は、必ずしも 1 とは限らず、クーラン数 α 及び波長と格子幅の比 $L/\Delta x$ の 2 つの量に依存する。 $\alpha = 0.6$ における $|G|$ の $L/\Delta x$ に関する変化を図 2-39 に示す。比較のために 1 次精度風上差分スキーム、Six-point スキーム及び Holly-Preissmann スキームの $|G|$ を同図に示している。

SOWMAC スキームは $L/\Delta x$ の広い範囲で厳密解の $|G| = 1$ と一致しており、 $L/\Delta x$ の小さい領域においても高い精度を保ち、Holly-Preissmann スキーム

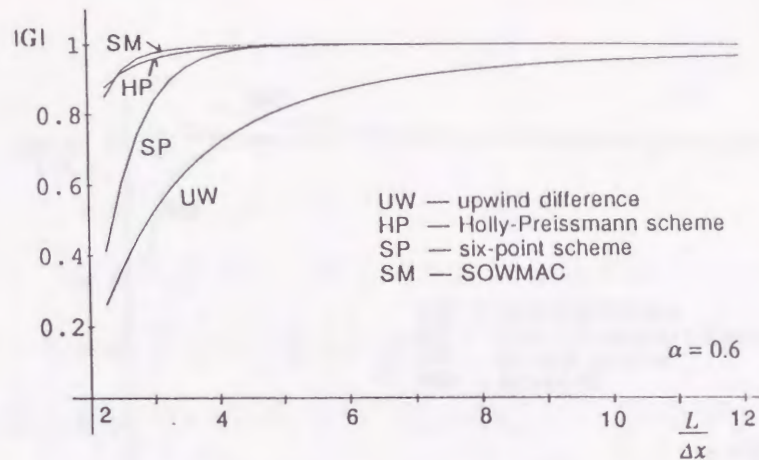


図 2-39 スキームの増幅係数と波長の関係 ($\alpha = 0.6$)

の特性に近い。

2) 位相誤差に関する解析

角周波数 σ の複素数表示として

$$\sigma = \text{Re}(\sigma) + j \text{Im}(\sigma)$$

とおいて式(2.76)に代入する。右辺と左辺の実部、虚部がそれぞれ等しくなることから伝播速度は最終的に次式のように求まる。

$$\frac{\text{Re}(\sigma)}{k} = \frac{1}{k\Delta t} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{B_2 B_3 - B_1 B_4}{B_1 B_3 + B_2 B_4} \right) \quad (2.78)$$

式(2.78)と厳密解の伝搬速度 U との比

$$\frac{\text{Re}(\sigma)}{kU} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{L}{\Delta x} \text{Tan}^{-1} \left(\frac{B_2 B_3 - B_1 B_4}{B_1 B_3 + B_2 B_4} \right) \quad (2.79)$$

は位相誤差に関する指標となり、この値が1から離れる程、数値分散を引き起こす。この指標もまたクーラン数 α 、 $L/\Delta x$ に依存して変化する。 $\alpha = 0.75$ における伝搬速度比を $L/\Delta x$ に対してプロットしたものが図2-40である。

$L/\Delta x$ の幅広い範囲において伝播速度比は1に近い値を示しており、また

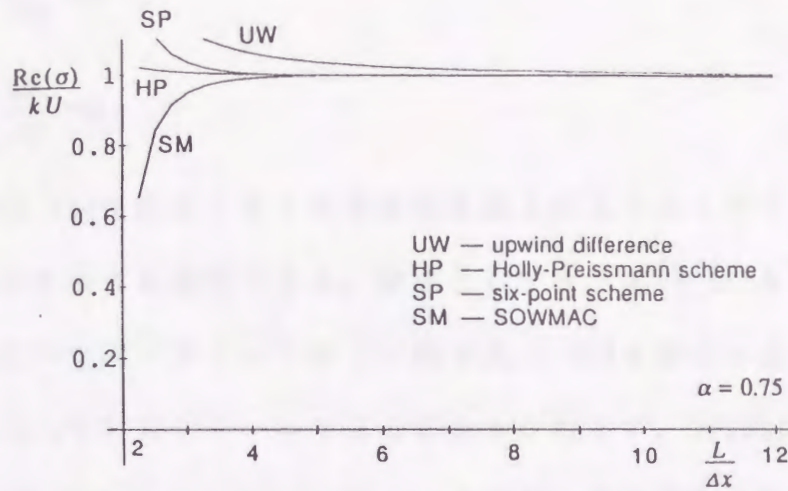


図 2 - 4 0 スキームの位相誤差と波長の関係 ($\alpha = 0.75$)

$L / \Delta x$ の小さい領域においても SOWMAC スキームは Six-point スキーム程度の高精度を有することが分かる。

(f) 多次元問題への展開

1) 2次元問題

1次元問題で開発された SOWMAC スキームの 2次元問題への拡張は容易である。

2次元の純粋移流方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2.80)$$

2.3.3節で述べたように、式(2.80)には拡散項がないので、特性曲線上で濃度は変化しない。短い1時間ステップの間に流体粒子が移動する経路を特性曲線の経路から変更し最初にx方向に移動させ、次にy方向に移動させる手法を利用することにする。1時間ステップに特性曲線が到達する地点までの移流の計算を上述のように2段階に分ければ、以下の1次元の計算を続けて2度行うことになる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (2.82)$$

式(2.81)、(2.82)は両式とも1次元純粹移流方程式であるので式(2.73)のSOWMACスキームがそのまま適用できる。解法としては、式(2.81)を最初に解いた後、その結果を用いて同一タイムステップ内で式(2.82)を解けば良い。この方法により、implicitな計算スキームであるにもかかわらず、SOWMACスキームは2次元問題でもADIスキーム(Leith(1965))と同様に計算量を大幅に減らすことができる。例えば計算領域の格子点が $N_x \times N_y$ 個の場合、implicitなスキームで解くには通常 $N_x \times N_y$ の大きさのマトリックスを解く必要がある。一方、SOWMACスキームの2次元展開においては、 N_x の大きさのマトリックスを N_y 回解いた後、直角方向に N_y の大きさのマトリックスを N_x 回解くだけで1ステップの全領域の計算が終了する。しかも、SOWMACスキームで使用する格子点は3点であるため解くべきマトリックスは3重対角行列となり、解を求めるのが非常に容易である。

2) 3次元問題

3次元の場合も1)と同様に、x方向、y方向、z方向の移流に対し、それぞれ分離してSOWMACスキームを個別に適用すれば良い。

2.5.3 モデル計算によるSOWMACスキームの検証

(a) 1次元モデル計算

SOWMACスキームを検証するために以下の初期条件の下で移流計算を行った。初期条件として2つのピークをもつ濃度分布（ピーク値10、標準偏差264m、中心位置 $x = 1,400\text{m}$ のGauss型濃度分布と、ピーク値6.5、標準偏差264m、中心位置 $x = 2,400\text{m}$ のGauss型濃度分布を重ね合わせたもの）が無限長水路を流速 $U = 0.5\text{m/s}$ で下流へ9,600sの間純粹移流したときの計算結果を図2-41に示す（Komatsu et al. (1989)）。

図2-41には、比較のため同じ条件下で、1次精度風上差分スキーム、2次精度風上差分スキーム、leapfrogスキーム、Lax-Wendroffスキーム、QUICKスキーム、QUICKESTスキーム、河村スキーム（大野-磯田(1990)）、Holly-Preis smannスキーム、Six-pointスキーム、改良型Six-pointスキームを用いた計算結果も示している。図中の太い実線が厳密解である。スキームによっては大きなダンピングや無視できない程の位相誤差を生じているのが分かる。SOWMACスキームは用いている格子点が僅か3点であるにもかかわらず、Six-pointスキーム程度の高精度を保ち、位相誤差もほとんど見られない。

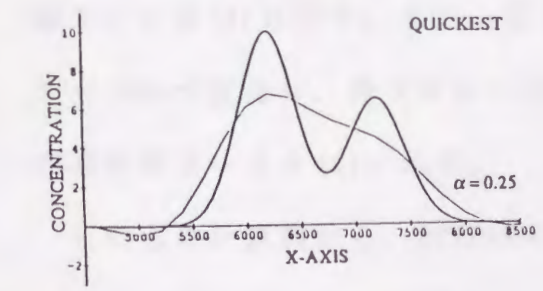
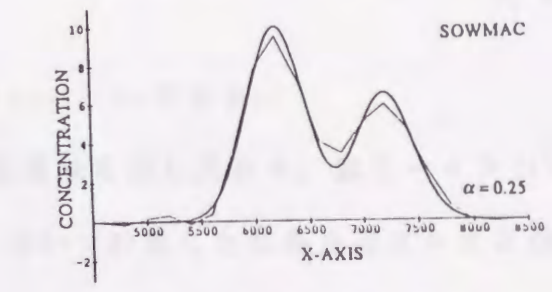
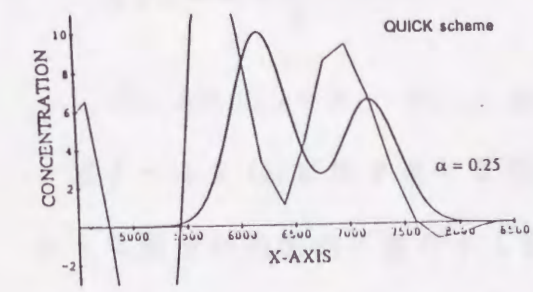
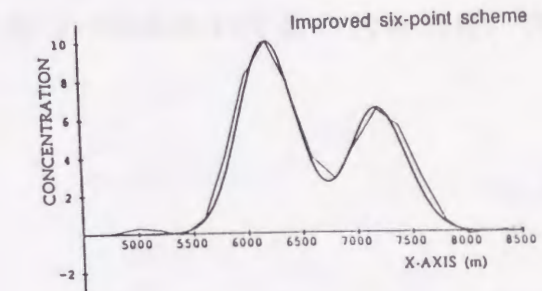
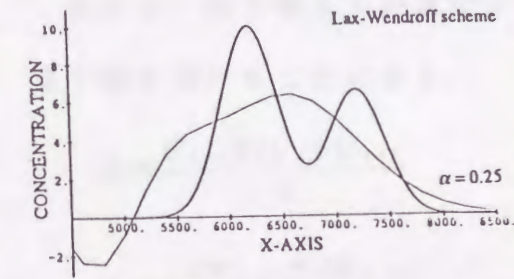
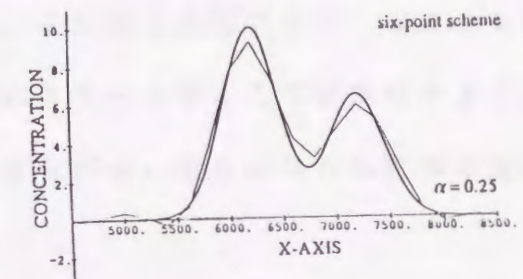
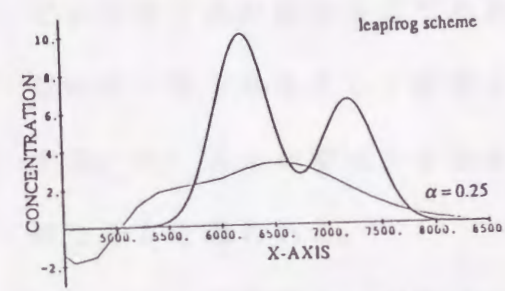
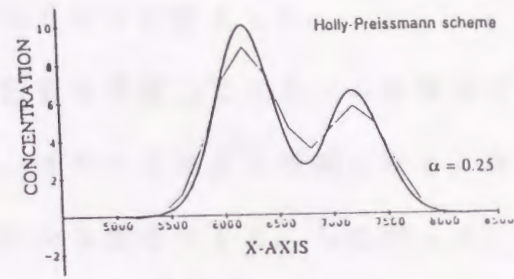
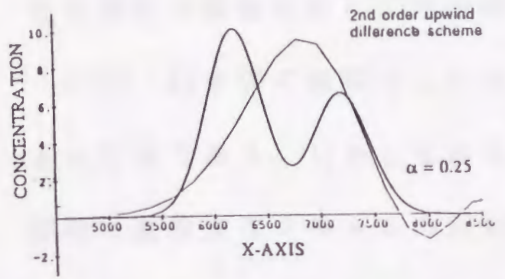
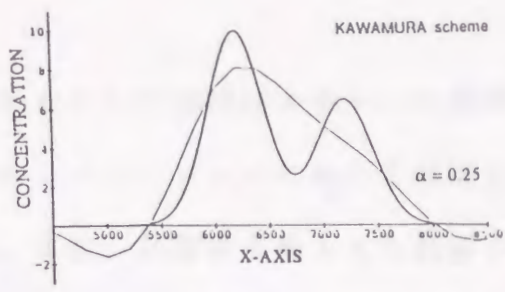
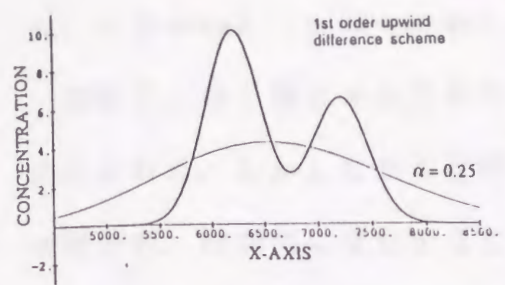


図 2 - 4 1 純粋移流計算スキーム
 によって得られた計算解の比較

(b) $U \neq \text{const.}$, $\Delta x \neq \text{const.}$ の場合

流速 U 、格子幅 Δx は近似的に一定であるとして SOWMAC スキームは誘導・定式化された。しかしながら自然界の拡散シミュレーションにおいては流れの場は場所的、時間的に変化することが多い。また、計算格子幅 Δx も計算の効率化や現象の緩急に応じて場所毎に変えられることが望ましい。

式 (2.73) を導く過程でこれらの変化の影響を考慮してスキームを構成することは可能である。しかしながらその場合、スキームはより複雑になり、本来の簡便で高精度なスキームの開発という目的から離れてくる。したがって、用いている格子点が僅か 3 点であることから、この格子点間では U , Δx とともに近似的に一定であるとして誘導された SOWMAC スキームをここでは採用することにする。 U , Δx が変化する場合も急激な変化がない限りかなりの計算精度が期待できると思われる。

流速 U 、格子幅 Δx が変化する場合は式 (2.73) において次の代表流速、代表格子幅を用いることにする。

$$U = \frac{U_{i-1} + 2U_i + U_{i+1}}{4} \quad (2.83)$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x_{i-1,i} + \Delta x_{i,i+1}}{2} \quad (2.84)$$

ここで、 $\Delta x_{i-1,i} = x_i - x_{i-1}$ 、 $\Delta x_{i,i+1} = x_{i+1} - x_i$ である。

図 2-42 (a) に示すような加速域、減速域を含む流れや、図 2-43 (a) のような流速が局所的に変化する流れ場において計算した結果を図 2-42 (b) と図 2-43 (b) に示す。また、図 2-44 (a) に示すように格子幅が $\Delta x = 200\text{m}$ から 100m へ変化し、再び $\Delta x = 200\text{m}$ に戻るような格子間隔を用いた場合の計算結果を図 2-44 (b) に示す。

これらの計算例から、SOWMAC スキームは流速や格子幅が変化する場合も精度

良く計算できることが明らかとなった。

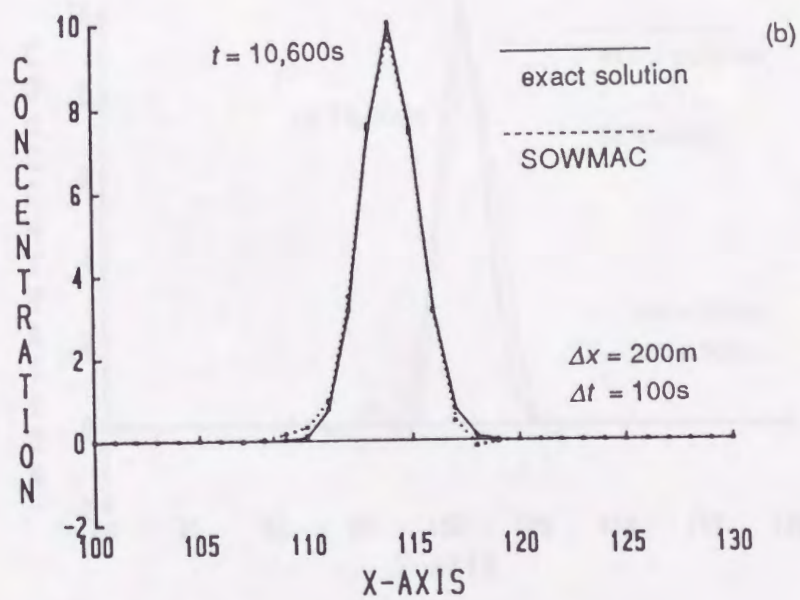
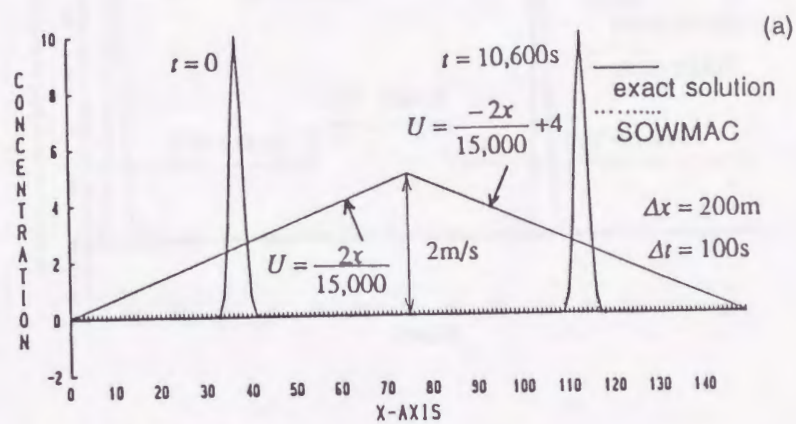


図 2 - 4 2 加速と減速のある流れにおける純粋移流の計算

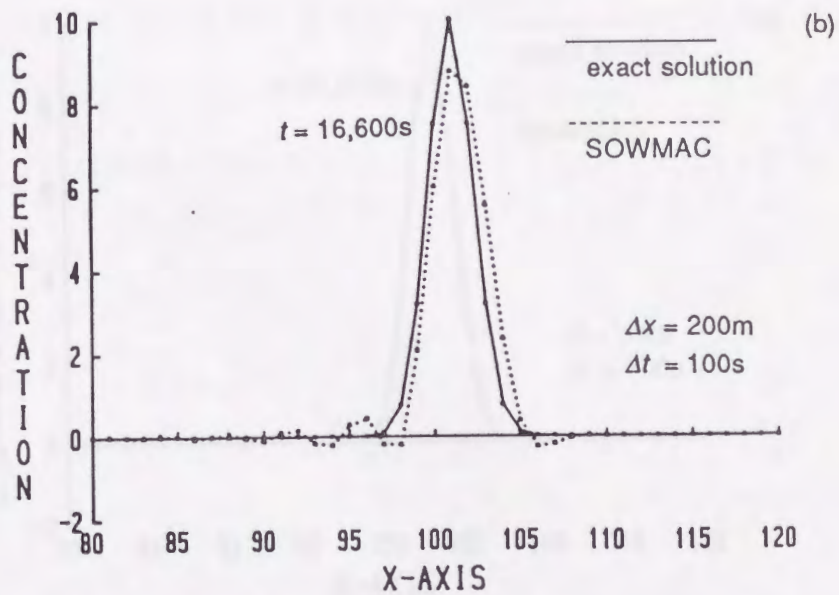
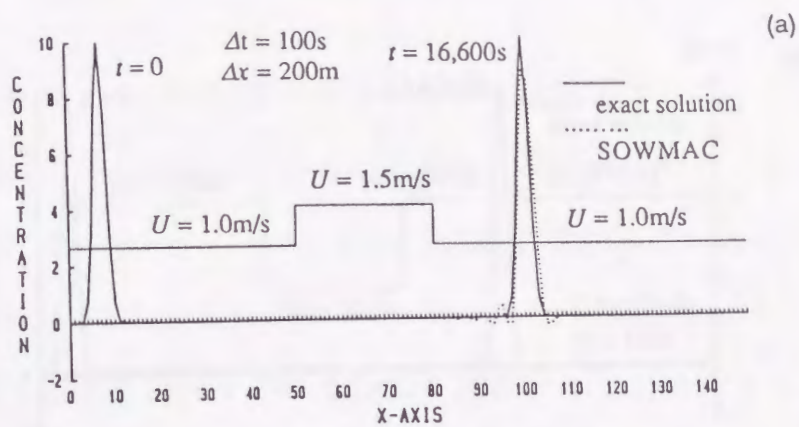


図 2 - 4 3 急激な流速変化があるときの純粋移流の計算

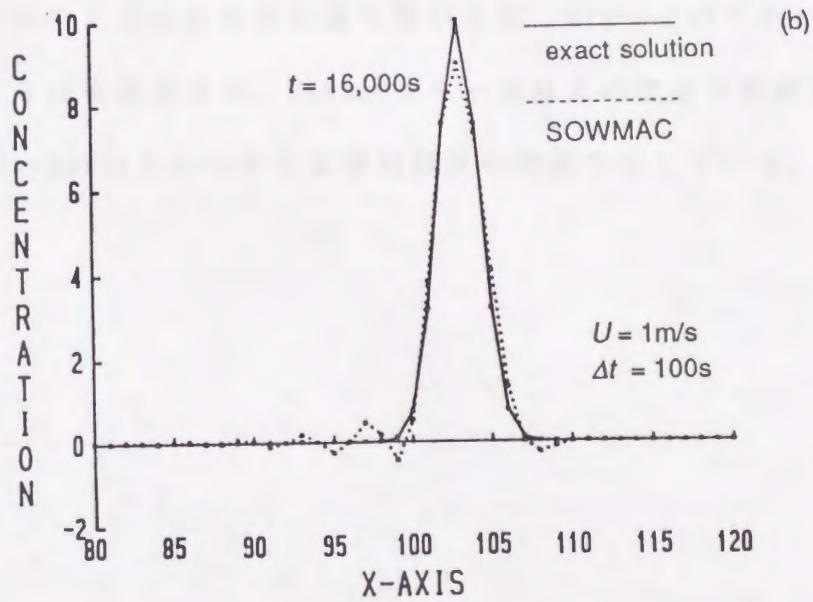
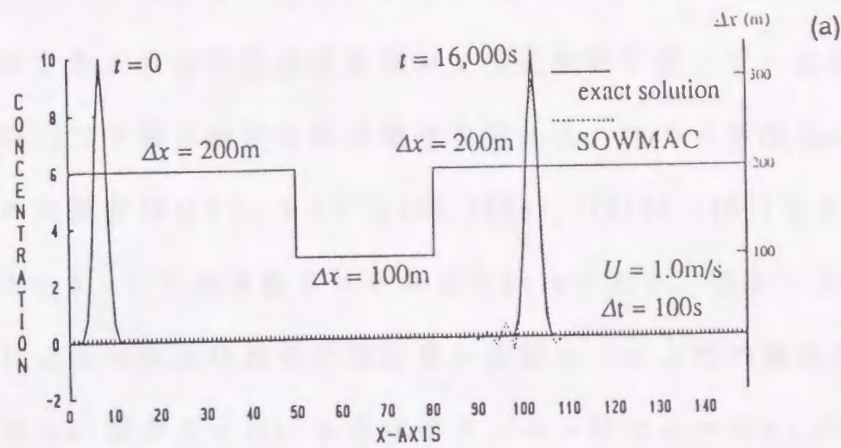


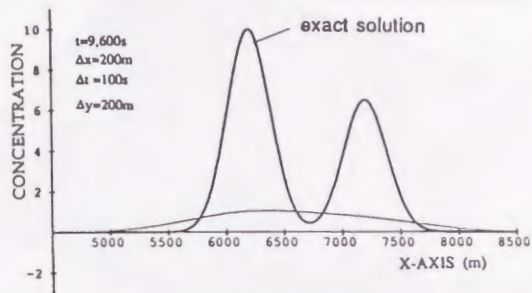
図 2 - 4 4 Δx を途中で急激に変化させた場合の純粋移流の計算

(c) 2次元モデル計算

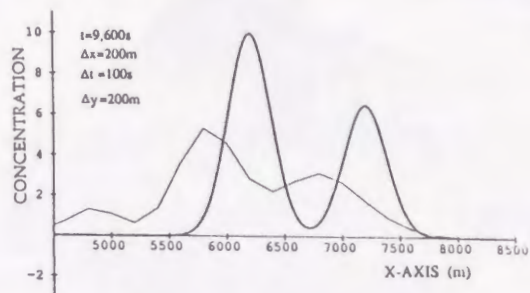
1) 一様流れ場におけるモデル計算

2次元移流のモデル計算として、2.5.3 (a)と同様に2つのGauss型濃度分布の重ね合わせで表される初期濃度分布が2次元無限平面上で一定流速 $U = 0.5 \text{ m/s}$, $V = 0.5 \text{ m/s}$ で下流に輸送される場合を考える。2つの平面Gauss型分布の初期のピークの位置座標は $(x, y) = (1400, 1400)$, $(2400, 2400)$ でそれぞれのピーク値は10.0と6.5, また標準偏差はそれぞれ264mである。図2-45は種々の計算スキームによる2次元移流の計算結果を直線 $y = x$ 上での濃度分布として表したものである。図中の β は、 y 方向のクーラン数で $\beta = V\Delta t / \Delta y$ である。図2-46は同じ計算結果を3次元グラフィックスにより表現したものである。これらの図よりスキーム間の精度の違いが容易に識別できる。

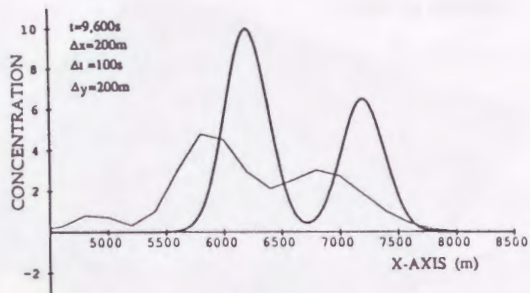
2次元移流の計算においては、SOWMACスキームは1点の計算当たり x 方向に3点、 y 方向に3点の計6点の値を用いるが、Six-pointスキームは1点の計算のために36点を使用する。SOWMACスキームはその使用点数が少ないにもかかわらず、Six-pointスキームとほぼ同程度の精度を有している。



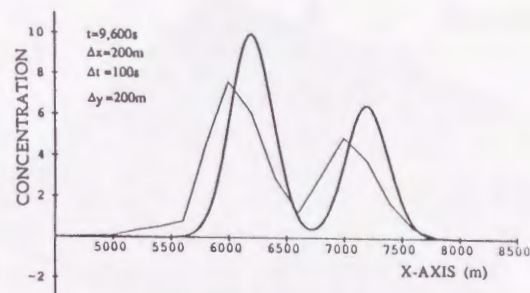
(a) 1st order upwind difference scheme



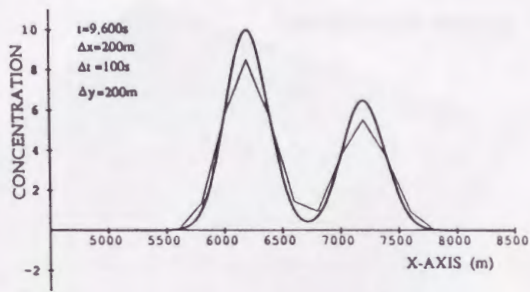
(b) leapfrog scheme



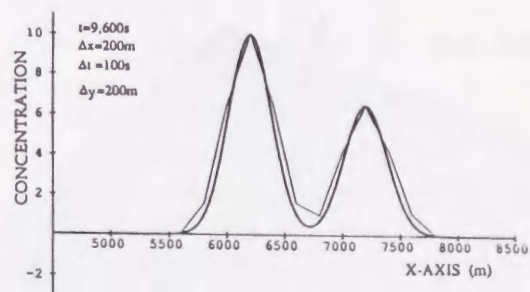
(c) Lax-Wendroff scheme



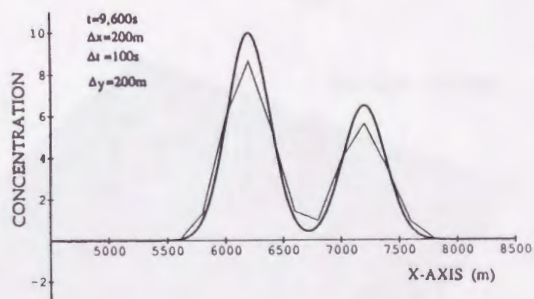
(d) staggered scheme



(e) six-point scheme



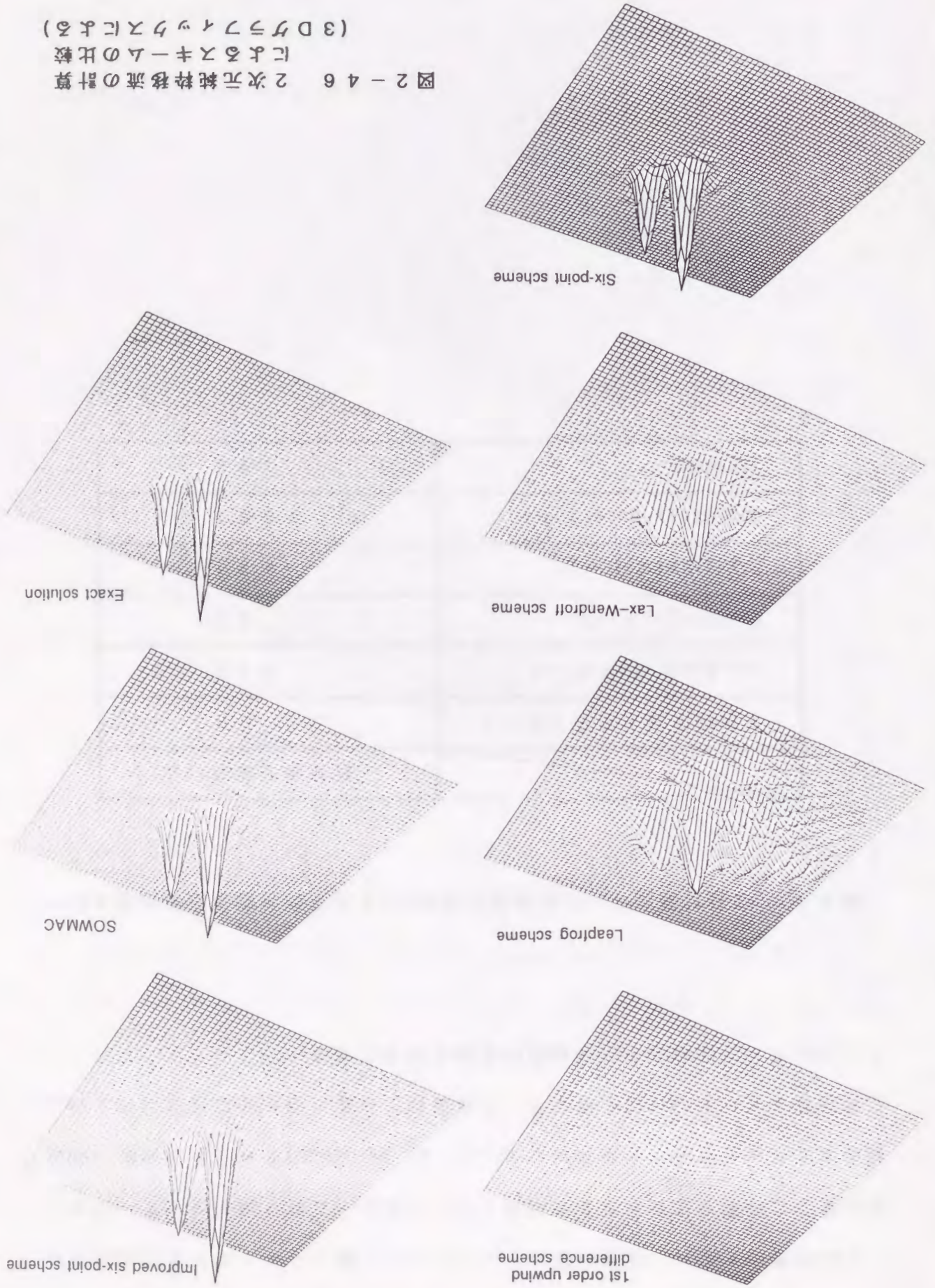
(f) improved six-point scheme



(g) SOWMAC

図 2 - 4 5
2次元純粋移流の計算
によるスキームの比較
($y = x$ 上で)

図 2-46 2次元純粋移流の計算
によるスキームの比較
(3Dグラフィックスによる)



なお参考のために、各種計算スキームについて図2-46の2次元問題の計算に要した時間を比較したものが表2-1である。この計算には、アップル社製の32ビットパーソナルコンピュータ-Macintosh II (クロック周波数16MHz、公称計算スピード2MIPS)を用いた。計算条件は前述の通り計算格子点60×60点、タイムステップ数96ステップの純粋移流の計算である。

表2-1 各種計算スキームの所要計算時間(2次元純粋移流計算の場合)

	計算所要時間(sec)
1次精度風上差分スキーム	56
Lax-Wendroffスキーム	189
Leapfrogスキーム	65
Six-pointスキーム	494
改良型Six-pointスキーム	1051
SOWMAC法	193

2) 剛体的に回転する流れ場におけるモデル計算

次に、2次元平面で角速度 $\omega = 2\pi / 12,000 (\text{s}^{-1})$ で剛体的に回転する流れの場を考える。これは、各象限で x 方向もしくは y 方向の流速の符号が変化する流れ場である。初期条件として図 2-47 (a) のような Gauss 型濃度分布を与える。計算領域は $4,000\text{m} \times 4,000\text{m}$ の 2次元平面で、初期条件はピークの位置 $(1,400\text{m}, 1,400\text{m})$ 、標準偏差 200m で、計算条件は $\Delta x = \Delta y = 100\text{m}$ 、 $\Delta t = 50\text{s}$ とした。 $t = 12,000\text{s}$ (1 回転後) の濃度分布を図 2-47 (b) に示す。初期条件と同じような濃度分布で剛体回転しているのが分かる。厳密解は初期条件と一致するが、得られた計算結果も良い一致を示しており、SOWMAC スキームは流速の変化する 2次元流れ場においても高い精度で移流の計算ができることが分かった。

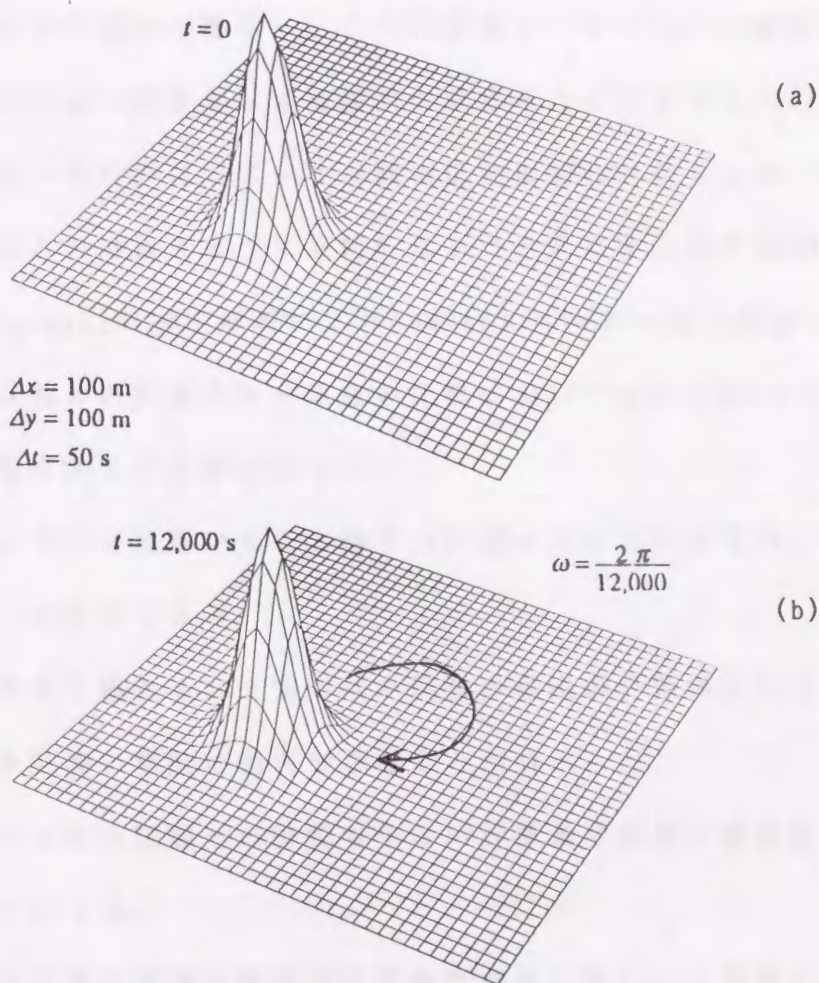


図 2-47 剛体的に回転する流れ場における移流の計算

2.5.4 まとめ

本節では、精度や安定性に優れた2階導関数の差分の特性に着目し、1階の移流方程式の代わりに2階の波動方程式を解くという新しい概念を用いて、従来の問題点を解消した移流のための新しい高精度計算スキームであるSOWMACスキームを開発・提案することができた。得られた主な結論は以下の通りである。

- (1) 1階の移流方程式の代わりに2階の波動方程式を解くという新しい概念を用いて、移流項の数値計算が安定で精度良く行えることが分かった。
- (2) 2階の波動方程式は解として前進波と後退波を持つが、このうち前進波のみを解として得られるような移流計算スキームを特性曲線法を利用して求めることができた。
- (3) スキーム中に現れる重み κ , θ を計算スキームのTaylor級数解析によってクーラン数 α の関数として理論的に求めることができた。
- (4) 計算スキームの形は、クーラン数の正負に関わりなく $|\alpha| \leq 1$ の範囲で用いることができるように最終的な1つの式にまとめた(SOWMACスキーム)。
- (5) Von Neumannの安定解析によりSOWMACスキームの高い精度と安定性を確認し、また種々の計算スキームとの比較においてもSix-pointスキーム程度の高精度を有することが分かった。
- (6) SOWMACスキームは用いている格子点が僅か3点であるため、境界付近での取り扱いが容易である。
- (7) 流速 U や格子幅 Δx が一定でない場合の移流の計算においてもSOWMACスキームは十分高い精度で適用できることが分かった。
- (8) 2次元・3次元問題への展開も少ない計算量で容易に精度良く計算できることが分かった。

以上、数値計算の困難な移流の計算のため全く新しい高精度計算スキームを提案したが、このSOWMACスキームは上述のように多くの長所を有することから、

今後実用面で大いに活用されるものと思われる。なお、このスキームは非線型慣性項等の計算にも応用できるものと思われる。今後の研究課題としたい。

2. 6 結言

本章では、移流拡散方程式の数値計算で難しいとされる移流項に焦点を当て、スプリット・オペレーター・アプローチと特性曲線法を利用して、従来の移流項計算スキームにおける短所を十分補った計算スキームを開発・提案することができた。

従来の計算法の中で高精度を有するHolly-Preissmannスキームは、そのスキームの中で従属変数として濃度だけでなく濃度勾配を移流させるという方法をとっていたので、多次元への拡張性に乏しかった。この問題点を解消するために濃度だけを従属変数として扱ったSix-pointスキームを開発した。この手法は、計算精度においてはHolly-Preissmannスキームとほぼ同程度の精度を保ちつつ、2次元、3次元問題へ容易に拡張できる計算法であった。

多次元問題においても高精度を保つために、Six-pointスキームにおける数値誤差を打ち消す負の拡散項を求めて導入し、改良型Six-pointスキームとして提案した。この計算法は2次元、3次元でも精度の劣化が非常に少ない高精度の計算法であった。

最後に、1階の移流方程式を解く代わりに2階の波動方程式を解くという全く新しい概念を用いて高精度の移流計算スキーム、SOWMACスキームを導くことができた。このスキームは、用いる格子点が空間3点だけであるため、境界付近の取り扱い方が容易で、かつ高い精度を有する計算法であった。このスキームの多次元への拡張は容易で、少ない計算時間で精度良く移流の計算を実行できることが分かった。

第 3 章

水域における拡散問題への応用

3. 1 緒言

第 2 章においては、移流拡散方程式の高精度計算スキームについて考察した。そして、いくつかの有力な計算法を開発することができた。この章では、前章の結果をもとにこれらのスキームのいくつかの応用について述べ検討を加える。

まずはじめに、拡散シミュレーションにおいて必要不可欠な拡散係数の評価にこの高精度移流計算スキームを用いた場合について考察する。第 2 章で述べたように移流の計算は簡単な差分などを用いると到底無視できない程の誤差を生じることが知られており、その計算には十分な注意が必要とされている。乱流拡散・移流分散の小さな湾などの計算では、移流の計算から生じた数値拡散が実際の拡散に比べて大きくなるため、計算の正否も比較的容易に判別できるが、拡散の大きな河川などでは数値拡散と乱流拡散・移流分散の区別がつかず拡散を過大評価してしまうことになる。一方、計算結果と現況を比較して拡散係数を決定しようとするときは、数値拡散が存在するために逆に拡散係数を過小評価することになる。

例えば、博多湾において水質指標の 1 つである COD の分布を数値シミュレーションした例について見てみる。図 3-1 は、移流項に 1 次精度風上差分スキームを用いて計算した博多湾の COD 分布である。第 2 章で開発した Six-point スキームを用いて全く同じ条件の下で COD 分布を求めると図 3-2 のようになる。また SOWMAC スキームによる博多湾の拡散計算からも図 3-2 とほとんど

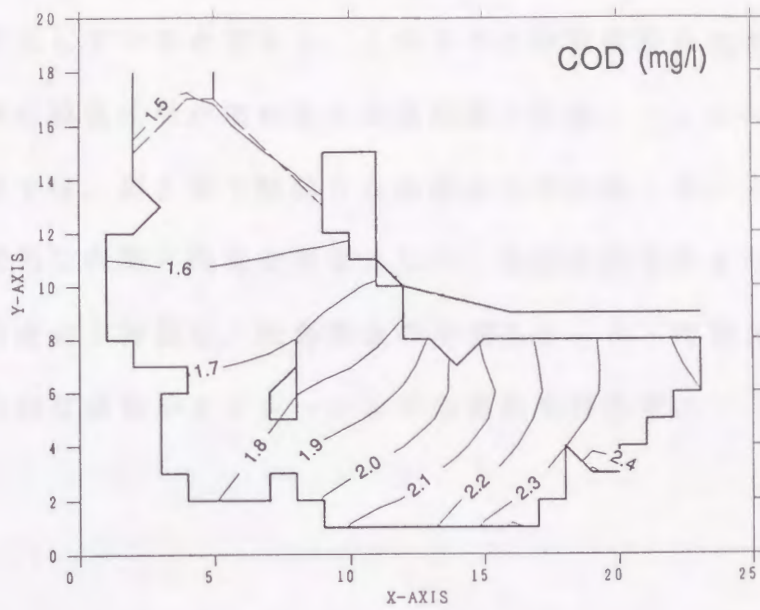


図 3 - 1 博多湾におけるCOD分布の計算結果(1次精度風上差分スキーム)

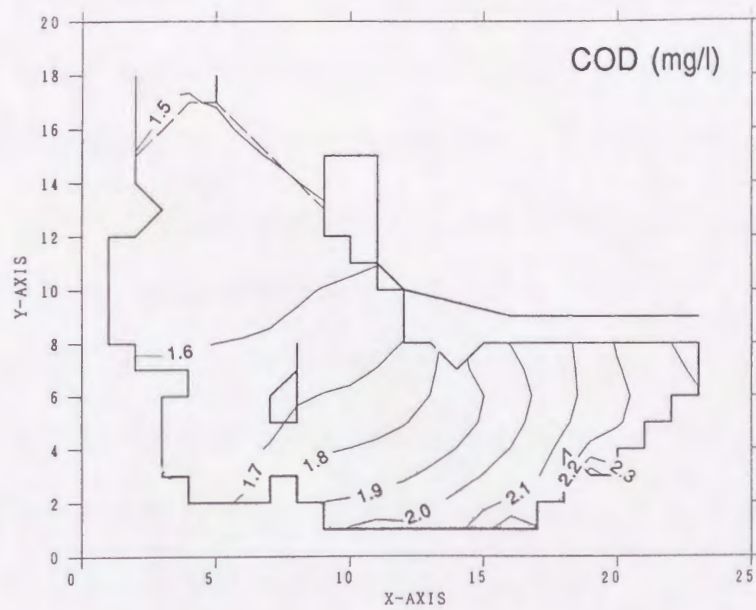


図 3 - 2 博多湾におけるCOD分布の計算結果(Six-pointスキーム)

ど一致したCOD分布が得られている。図3-1は図3-2に比べて明らかに拡散を過大評価していると言える。このように数値拡散の大きいスキームでは、真の拡散以外に数値拡散が加わるため高精度の拡散シミュレーションは期待できない。本章では、第2章で開発した高精度移流計算スキームを用いて、潮流の影響が支配的な内湾・内海を対象として、数値拡散を含まない物理的な拡散係数の値を精度良く評価し、混合現象の空間スケール・時間スケールに応じた統一的で総合的な拡散シミュレーションの実現を目指す。

3. 2 瀬戸内海における物質の分散係数の推定

3.2.1 はじめに

瀬戸内海における物質の拡散問題については、工業排水や家庭排水による水質の悪化、赤潮の発生等により漁業面や環境面から研究の必要性が認識され、さまざまな検討が行なわれてきた。和田・角湯(1974)は流速変動の連続測定結果から相関係数を算出し、Taylorの定理を用いて $10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$ のorderの水平方向の拡散係数 K_x 、 K_y を求めている。杉本・樋口(1972)や上嶋ら(1982)は1次元拡散方程式を用いて水理模型による拡散実験の結果を解析し、内海の拡散係数・分散係数を求めている。また、瀬戸内海に潮汐残渣還流モデルを適用して拡散係数を評価する試みも行なわれている(玉井・早川(1975), 玉井(1976))。

一方、速水・宇野木(1970)は瀬戸内海全体に渡って拡散係数を一定と仮定して1次元拡散方程式の解を求め、河川水の流入により希釈された海水の塩分濃度分布と照合することにより分散係数 $K=10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$ を得ている。しかしながら極めて複雑な地形と潮流をもつ瀬戸内海でたとえ1次元的な取り扱いにしても拡散係数が一定ということはありません、より詳細でかつ正確な場所ごとの拡散係数・分散係数の評価・算定が望まれている。

本節では、場所ごとの代表流速・代表長さから拡散係数を評価することを試み、1次元拡散方程式を移流項の数値拡散の影響も考慮してSix-pointスキーム等の高精度スキームを用いて数値計算法により解析し、塩分濃度分布の実測値に最も良く一致する拡散係数を場所ごとに決定する。

3.2.2 瀬戸内海の内自然条件

(a) 地形

周防灘から大阪湾までを含む瀬戸内海は関門、豊予、鳴門、紀淡の4つの海峡で外海と結ばれ、東西約450km、南北およそ18~50km(平均は約33km)程度で、地形は極めて複雑に入り組んでいる。瀬戸内海には大小約3,000の島が存在し、流れや拡散の現象を一段と複雑にしている。

本節では瀬戸内海と外洋の海水交流を考えているので、ここでは豊後水道や紀伊水道を含めて取り扱うことにする。速水・宇野木(1970)に倣って図3-3に示すように20km間隔の計算格子点をもち、豊後水道と周防灘の交点(T)から始まる東向き1次元座標 x を考える。そして、豊後水道の南端から交点(T)までを x_1 座標、関門海峡から交点(T)までを x_2 座標とする。鳴門海峡は断面積が紀淡海峡の1/13と小さく、播磨灘に流出入する潮流も明石海峡からの方が圧倒的に大きいことが分かっている(和田・角湯(1974))ので本解析では無視する。表3-1に図3-3の各格子点の断面積と海面幅を速水・宇野木(1970)から引用して示す。

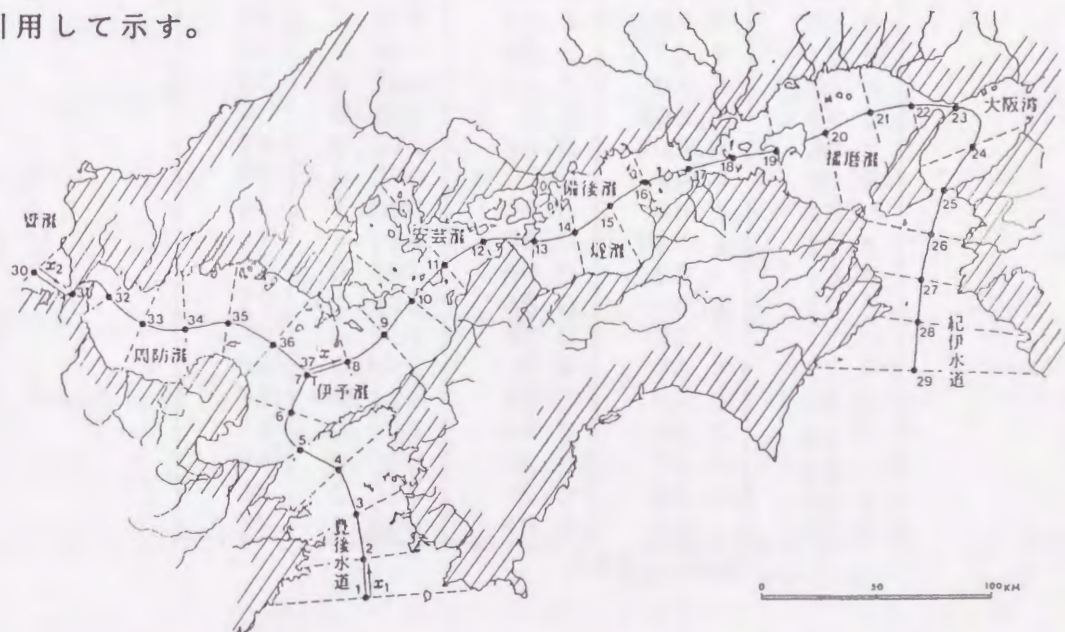


図3-3 瀬戸内海と断面座標

表 3 - 1 断面の諸量

断面 座標	断 面 積 A(km ²)	海 面 幅 b(km)	淡 供 給 水 量 q(*)	M ₂ 大 潮 流 最 速 (cm/sec)
1	22.428	108.0	24.9	35.0
2	4.860	60.0	29.1	35.0
3	2.928	48.0	31.3	35.0
4	3.084	48.0	26.2	29.5
5	1.236	13.3	85.6	41.0
6	2.475	34.5	78.3	29.5
7	2.162	20.3	4.7	27.0
8	2.202	40.5	30.7	24.0
9	1.899	46.5	36.1	20.5
10	1.788	48.0	52.5	15.5
11	1.239	30.0	134.2	78.5
12	0.705	22.5	113.0	76.5
13	0.215	6.2	36.4	67.0
14	0.633	34.5	17.7	52.0
15	0.810	42.0	20.3	36.5
16	0.252	27.0	68.5	37.5
17	0.204	12.0	69.5	62.0
18	0.195	18.0	106.5	69.0
19	0.639	36.0	97.1	48.5
20	1.788	55.5	43.0	27.5
21	1.131	49.5	86.2	19.0
22	0.264	19.5	53.3	108.5
23	0.244	4.0	228.1	64.0
24	1.377	54.0	233.8	30.5
25	0.370	5.9	42.4	20.5
26	1.680	36.0	88.9	13.0
27	1.884	36.0	118.3	16.5
28	3.981	60.0	84.1	13.5
29	27.810	96.0	45.6	13.5
30	0.924	30.0	22.7	17.5
31	0.011	0.6	36.2	17.5
32	0.126	18.0	56.9	17.5
33	0.507	37.5	88.2	21.5
34	0.768	36.0	79.8	26.5
35	1.215	39.0	48.2	32.0
36	1.809	45.0	49.1	31.0

*単位10⁶m³/km・year

(b) 潮流と恒流

瀬戸内海における潮流は周期的な往復流であるが、和田・角湯(1974)は環境庁(昭和47年7月～8月)、運輸省(昭和46年8月)、ならびに通産省(昭和46年9月)の潮流流速連続観測のデータを整理して潮流楕円要素を求めた。そして全ての点で半日周潮流(M_2 潮、周期 $T=12.42$ 時間)が卓越し、 M_2 潮の潮流楕円は大阪湾を除くと長軸方向が極端に大きく、したがってほぼ直線的な往復運動を行っていることを示した。潮流速の測定地点は図3-3の格子点とは必ずしも一致しているわけではないので、得られたデータから直線内挿して格子点上の M_2 潮の長軸方向の流速を求め表3-1に示した。なお、表層と中間層のデータがある場合はその平均値を用いた。

内海の恒流については古くから東向流の存在が言われており(日高(1937))、速水・宇野木も塩分濃度分布との比較から東向流を支持しているが、これを実証する明確な事実はまだ見出されていない。また関門海峡や豊後水道における恒流については今までのところ全く不明である。

(c) 淡水供給量

瀬戸内海における拡散現象を把握するためには、そこに供給される淡水の量を知る必要がある。淡水は陸地部分及び海面への降水によって供給されるが、一方、海面からの蒸発によって失われる。速水・宇野木(1970)は年間の河口流量は流域面積と年降水量に比例するとの仮定の上に計算されたものを用いているが、平野部が山間部より一般に雨量が少ないことを考慮して0.75倍したものをを用いている。ただし、0.75という数値は便宜的なものとのことであった。このような曖昧さを避けるため本節では新たに淡水供給量を算出し直した。瀬戸内海に流れ込む22の一級河川の年間流量を流量年表(1984～86)から読み取り、河川別に3年間の比流量の平均値を算出した。2級河川以下の小河川については

両側の一級河川の比流量の平均的な値に流域面積を掛けて河川流量を計算した。蒸発量については不明な点もあるのでここでは海面への降水量と蒸発量がほぼ相殺し合うものとみなした。得られた結果を表3-1に示すが、関門海峡や豊後水道、紀伊水道を含む瀬戸内海全体への淡水の総流入量は約 $4.8 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{year}$ となる。これは速水・宇野木の $6 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{year}$ の0.8倍となっており、彼らが最終的に採用した0.75に近い数値となっているのは興味深い。

(d) 内海の塩素濃度分布

瀬戸内海の塩素濃度は随分以前からかなり多く実測されているが、ここでは速水・宇野木(1970)の整理した結果を用いることにする。塩素量分布を示す以下の図でハッチの部分の上端は下層(10m以深)平均、下端は上層(10m以浅)平均を示す。塩素濃度は外洋から内海内部に向かうにしたがい低くなり、河川水の流入の最も多い大阪湾からその西側の播磨灘にかけて最も低い。周防灘では関門に向かうほど塩素濃度が低くなっている。全海域を通してハッチ部分の厚さはそれ程大きくはない。このことは上下層が比較的良好に混合していることを意味しており、断面平均量を用いた一次元の拡散モデルの適用の可能性を示唆している。

3.2.3 一次元拡散の数値計算

(a) 一次元拡散・分散方程式

保存性物質の濃度(単位質量の海水に含まれる物質の質量)を $C(x, t)$ 、断面積を $A(x)$ 、拡散係数を $K(x)$ とする。 K には断面平均流速 $U(x)$ による移流以外の混合拡散に関与する全ての要因が含まれる。内海の長さを L 、入口 $x=0$ を通って単位時間に流入する海水の量を Q_0 、単位長さ当り単位時間に供給される淡水の量を $q(x)$ 、放出物質の質量を $m(x)$ とすると一次元の連続の式と拡散方程式は次のようになる。

$$U(x) = \frac{1}{A(x)} \left\{ Q_0 + \int_0^x q(\xi) d\xi \right\} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(AK \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{qC}{A} + \frac{m}{\rho A} \quad (3.2)$$

ここで境界条件は $C_{x=0} = C(0)$ 、 $C_{x=L} = C(L)$ である。

速水・宇野木(1970)は定常状態でかつ $K = \text{const.}$ として数値積分を用いて上式を解いたが、本節では K は場所の関数として数値計算を行なうことにする。スプリット・オペレーター・アプローチを採用し、式(3.2)左辺の移流項の計算には第2章で開発した高精度のSix-pointスキームを、右辺の拡散項の計算は2次精度の中央差分を用いた。

(b) 単一内海の数値計算

図3-3に見られるように瀬戸内海は交点(T)をもつ複合内海と考えられるが、伊予灘の東部付近(地点9)から紀伊水道(地点29)にかけては単一内海と見なせるので、伊予灘東部以西と以東に分けて考えることにする。塩分の分布を考える場合には、内海内部における物質源は無視できるので式(3.2)において $m =$

0とおけばよい。

1) 数値拡散係数の評価

式(3.2)の数値計算においては、通常左辺の移流項の計算に伴う数値拡散に注意を払わなければならない。しかしながら、瀬戸内海の恒流の平均流速は小さいので移流の計算に伴う数値誤差は高精度のSix-pointスキームを適用する限りはほとんど無視してさしつかえない。一方、式(3.2)の右辺の勾配型で表わされている拡散項については断面積や海面幅が急激に変化するため差分で近似すると多くの誤差を伴い、数値拡散が無視できなくなる。速水・宇野木(1970)が得た恒流の流量 Q 。及び表3-1の q を用い、場所的に $K = \text{const.}$ として得られた塩素濃度の解と非定常数値計算ではぼ定常となるまで計算を行なって得られる定常解とを一致させることにより数値拡散係数 K' を見積ることができる。移流項の離散化に伴って起こる数値拡散の場合は数値拡散係数はクーラン数 $\alpha (= U \Delta t / \Delta x)$ の関数となるが、今回のような拡散項の離散化に伴う数値拡散においては K' が K に比例することが期待される。 $\Delta x = 20 \text{ km}$, $\Delta t = 3 \text{ hour}$ の場合に得られた K' を図3-4に示す。

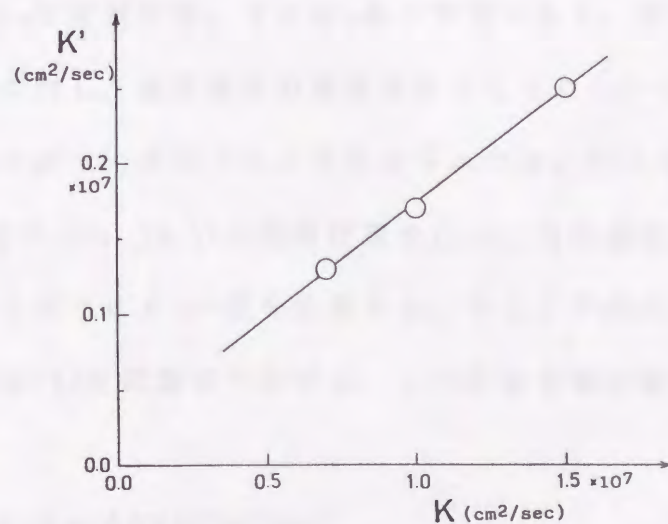


図3-4 数値拡散係数 K' と拡散係数 K の関係(瀬戸内海)

K' は K に比例し、 $K' = 0.17K$ の関係があることが分かった。従って数値計算に使用する拡散係数として $K - K' = 0.83K$ を用いれば数値拡散係数 $0.17K$ の働きが加わって K と等価の拡散係数が作用することになる。以下の数値計算においては K は一定でなく場所ごとに変わるが上記の性質がそのまま保持されると仮定して $0.83K$ を用いることにする。

2) 拡散係数と恒流流量の評価

物質の拡散係数は代表流速と代表長さの積に比例するであろう。瀬戸内海では M_2 潮による流速成分が卓越しているので、代表流速として M_2 潮の最大流速 V_M をとることにする。一方、代表長さとしては海面幅 b と tidal excursion の内小さい方が支配的と思われるが、海面幅は 1 km 未満から 100 km 以上まで変化しているため、場所によっては両者の影響が拡散係数に及んでいると思われる。そこで取り合えずここでは各々別個に考えることにして、拡散係数 K を次のように表わす。

$$K = \beta_t V_M^2 T \quad (3.3)$$

$$K = \beta_b V_M b \quad (3.4)$$

ここで、 β_t 、 β_b は比例定数、 T は M_2 潮の周期である。地点(9)から地点(29)までの単一内海に対し、塩素濃度の境界条件として $C(9) = 18.55\%$ 、 $C(29) = 19.06\%$ 、恒流流量は速水・宇野木により与えられた Q_0 から $Q(9) = 7.6 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{year}$ を求めて式(3.1)、(3.2)の数値計算を行い、塩素濃度分布を求め実測値と最も良く一致するように β_t の値を決定する。そして今度は β_t をその最適値で固定し、最適の $Q(9)$ を試算法で求める。この計算を順次繰り返して収束させ次の結果を得た。

$$\beta_t = 0.28, \quad Q(9) = 14.6 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{year} \quad (3.5)$$

このときの塩素濃度分布の計算値と実測値を速水・宇野木の計算結果とともに

図 3 - 5 に示す。実測値と良く一致していることが分かる。

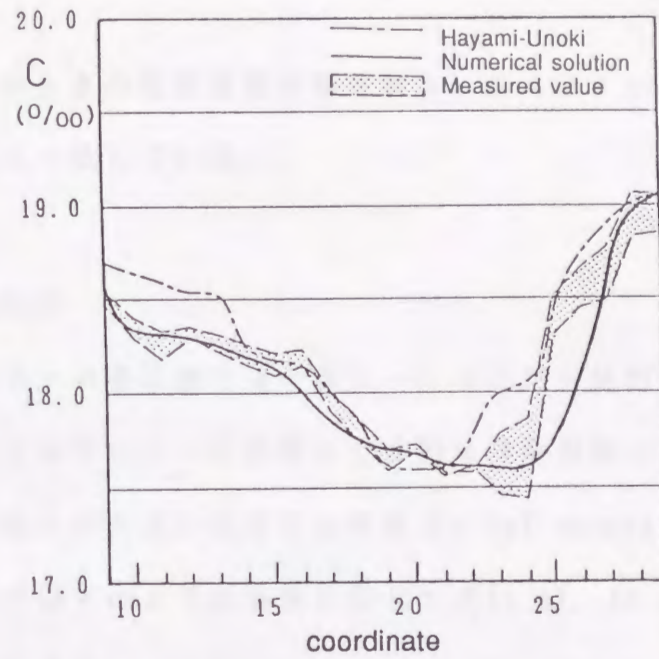


図 3 - 5 塩素濃度の実測値と計算値(式(3.3))の比較

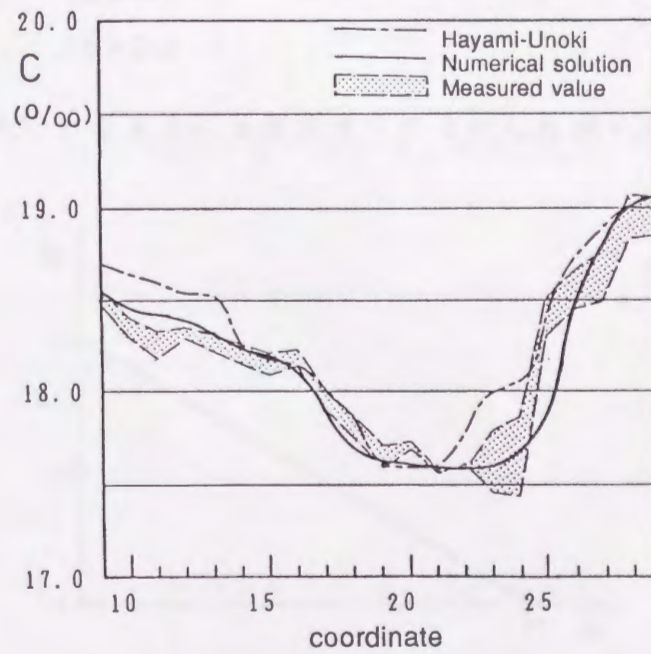


図 3 - 6 塩素濃度の実測値と計算値(式(3.4))の比較

一方、式(3.5)のQ(9)と式(3.4)の拡散係数を用いて、数値解が実測値と最も良く一致するように β_0 を求めると

$$\beta_0 = 0.13 \quad (3.6)$$

が得られる。そのときの塩素濃度分布を図3-6に示すが速水・宇野木の解よりも実測値と良く一致している。

3) 拡散係数の決定

図3-5と図3-6を比較すると図3-6の方が全体的に一致度がやや良いようである。長さスケールへの影響は全体的には海面幅 b の方がやや優勢と思われるが、海面幅 b が大きいたまにはやはりtidal excursionが支配的であると思われる。そこで以下のように場所に応じて式(3.3), (3.4)の拡散係数の荷重平均をとることとする。

$$K = \theta \beta_0 V_M b + (1 - \theta) \beta_t V_M^2 T \quad (3.7)$$

ここで θ は重み関数で次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 1 - (b/b_0) & (b \leq b_0) \\ \theta &= 0 & (b > b_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

図3-7に示されているように b が大きくなるにしたがい θ は減少する。

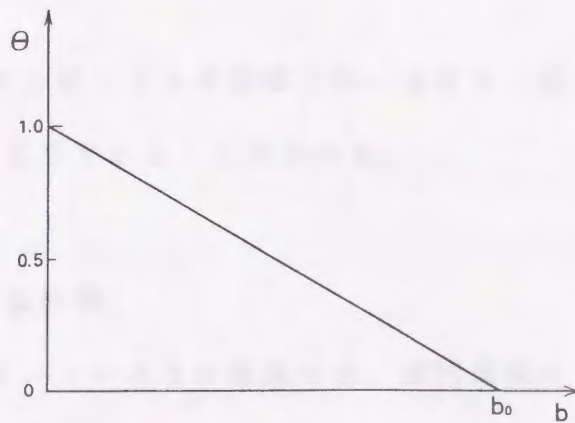


図3-7 重み関数 θ (式(3.8))

式(3.7)の拡散係数と式(3.8)の重み関数を用いて再度拡散方程式(3.1), (3.2)を計算し、計算値が最も良く実測値と一致するときの b_0 の最適値を求めると

$$b_0 = 100 \text{ km} \quad (3.9)$$

であった。このときの計算値と実測値の比較を図3-8に示す。

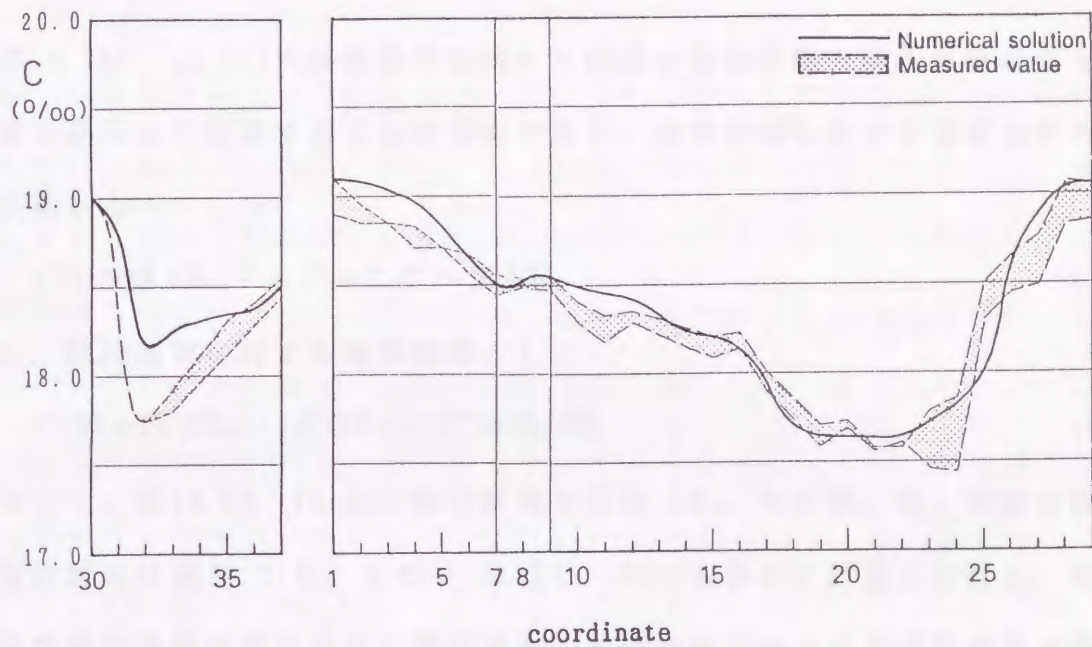


図3-8 塩素濃度の実測値と計算値の(式(3.7))の比較

図3-5, 図3-6と比較しても実測値との一致度は一段と改善されており、式(3.7)の荷重平均が妥当であることがわかる。

(c) 複合内海の数値計算

現実の内海は図3-3のように豊後水道、関門海峡そして紀伊水道に連なる複合内海と見なされる。そこで複合内海モデルを考え、豊後水道方面の諸量に添字1、関門海峡方面の諸量に添字2を付ける。豊後水道や関門海峡における

拡散係数については式(3.7)をそのまま用いることにして、ここではこれらの海域の恒流について考察する。豊後水道から流入してくる恒流流量を Q_1 、関門海峡から流入する恒流流量を Q_2 とすると、交点(T)での流量と塩素濃度の連続条件から次の条件を満たさなければならない。

$$Q_1 + \int_{x(1)}^{x(7)} q dx_1 + Q_2 + \int_{x(30)}^{x(37)} q dx_2 = \int_{x(7)}^{x(9)} q dx + Q(9) \quad (3.10)$$

$$C(7) = C(37) = C(T) \quad (3.11)$$

式(3.10)、(3.11)の連続条件を満たせば逆に豊後水道と関門海峡は各々単一内海と見なして計算することが可能である。豊後水道に対する境界条件として実測値から

$$C(1) = 19.10\%, \quad C(7) = C(T) = 18.50\% \quad (3.12)$$

また、関門海峡に対する境界条件として

$$C(30) = 19.10\%, \quad C(37) = C(T) = 18.50\% \quad (3.13)$$

を用いて、式(3.1)、(3.2)の数値計算を行なった。その際、 Q_1 の値を仮定し、拡散係数 K は式(3.7)を、また Q_2 は式(3.10)から求めて計算を実行し、得られた計算値が豊後水道ならびに周防灘から関門海峡にかけての塩素濃度分布の実測値に最も良く適合するように Q_1 を決定した。このときの Q_1 、 Q_2 は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= 17.5 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{year} \\ Q_2 &= -4.15 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{year} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

したがって、恒流は豊後水道から入って伊予灘との交点(T)でその大部分は東流として紀伊水道の方へ向かうが一部分が西流として関門海峡を西上することが明らかとなった。

Q_1 を決定するための計算において数多くの計算を行なったがその中に $Q_2 > 0$ となるケースももちろん含まれていた。しかしながら得られた結果は実測値と

全く一致しなかったことから、関門海峡での西流はほぼ間違いないものと思われる。式(3.14)の Q_1 、 Q_2 のときの塩素濃度分布の計算値を図3-8に示すが、この海域でも関門海峡のごく近くを除いてかなり良い一致が得られている。なお断面座標 $x(8)$ については計算を行っていないので $x(7)$ と $x(9)$ の塩素濃度から直線内挿して求めた。

(d) 瀬戸内海の拡散係数

図3-8の塩素量分布の計算値に対応する拡散係数 K が式(3.5)~(3.9)から計算され、図3-9に示されている。拡散係数は場所的にかかなり大きく変動しているが、中でも安芸灘や備讃瀬戸、明石海峡などの狭さく部の近くで大きな拡散係数を示しているのは興味深い。なお今回の解析では関門海峡の拡散係数の値が非常に小さくなったが、これは関門海峡での V_M 値が与えられていなくてやむなく地点(32)の V_M 値を外挿したために生じたもので、関門海峡については更に詳しい検討が必要である。

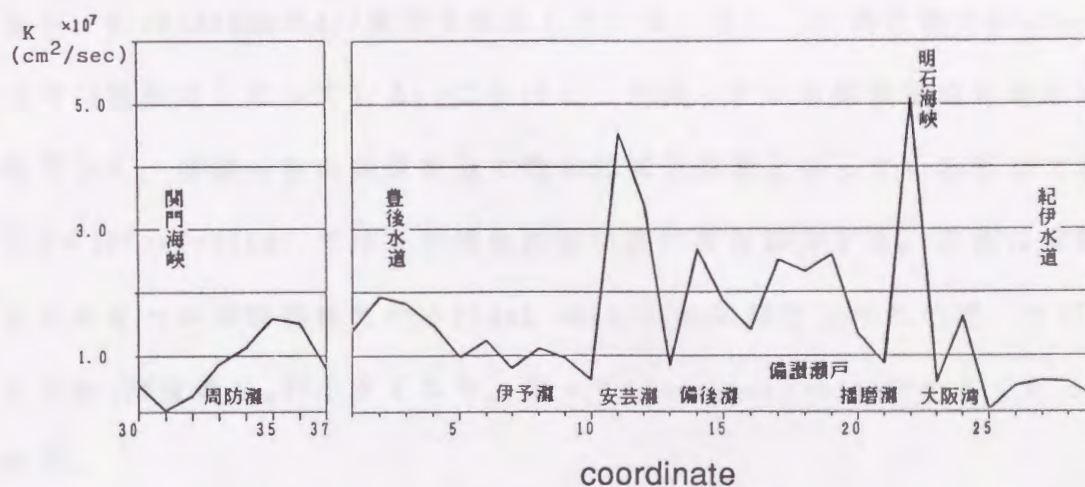


図3-9 瀬戸内海の場合毎の拡散係数

また、単一内海と見なせる地点(9)から(29)の各断面の拡散係数 K を海面幅 b に対してプロットしたのが図3-10である。 $b \leq 2 \times 10^6 \text{ cm}$ (20km) で

$$K \approx 0.1b^{\frac{4}{3}} \quad (\text{cm, s 単位}) \quad (3.15)$$

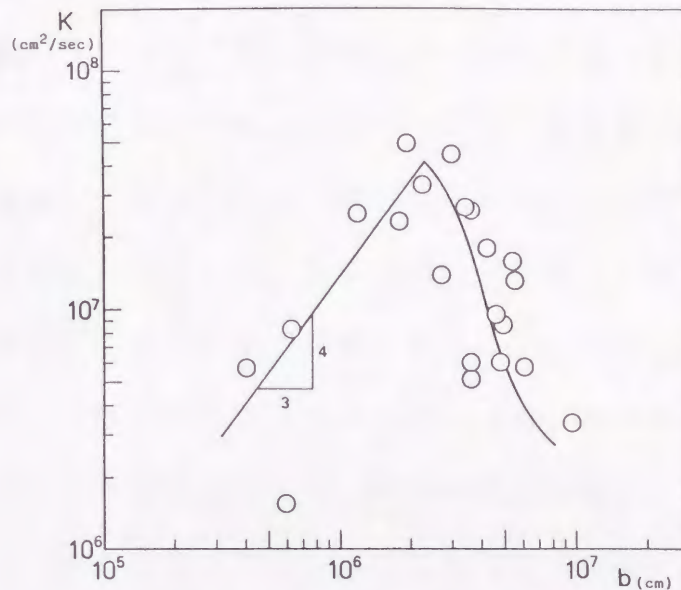


図3-10 瀬戸内海における拡散係数と拡散幅の関係

となり、Richardsonの4/3乗則を満足している。但し、比例定数がRichardsonの0.01の10倍程度となっている。これはここで扱っている拡散係数 K が乱流拡散係数でなく、移流分散の効果を全て含んだ拡散係数となっているためであろう。 $b > 2 \times 10^6 \text{ cm}$ (=20km) では b の増加に従い逆に K は減少する。これは支配的な長さのスケールが海面幅 b から tidal excursionに移行したためで、 b が大きくなると M_2 潮流速 V_M が小さくなり、従って tidal excursion が小さくなるからであろう。

3.2.4 まとめ

瀬戸内海(図3-3)における物質の拡散現象をSix-pointスキームを用いて詳細に検討し、式(3.1), (3.2)に対してほぼ妥当と思われる1次元の拡散係数値を場所ごとに評価することができた(図3-9)。今後応用面に利用できるものと思われる。

3. 3 内湾における潮流と物質拡散のシミュレーション

3.3.1 はじめに

内湾における環境汚染や水質浄化を議論するとき、流れや物質拡散に関する情報が必要となる。潮流や物質拡散の数値計算を行うためには渦動粘性係数・渦動拡散係数をできるだけ正確に評価することが重要である。和田ら(1974)は、温排水拡散予測手法として数値シミュレーションによる解析を導入し、その適合性について議論している。しかしながら、これらの拡散能の簡単かつ正確な評価法は、現段階においてまだ、確立されておらず、本来は場所毎に変化するはずの渦動粘性係数、渦動拡散係数を一定とおき、その一定値についても計算結果と実測値との比較検討から決定するといった、非常に面倒で不正確かつ必ず実測値を必要とする評価を行っているのが現状である。

渦動粘性係数、渦動拡散係数は、場所毎の流れの特性に依存しており、本来各々の場所に応じて変化しなければならない。本節では、これらの量が場所毎の代表流速と場所毎の代表長さの積に比例するという概念を導入している。潮流が最も支配的な因子で、拡散の主な原動力になっている内湾において平面2次元数値シミュレーションを適用するとき、代表流速、代表長さとして場所毎の最大潮流流速 V_m と場所毎の水深 h を考えるのは自然であろう。したがって、渦動粘性係数 ν_t は以下の式で表せる。

$$\nu_t = \beta_h V_m h \quad (3.16)$$

ここで、 β_h は普遍定数と考えられる。しかしながら、厳密には β_h は自然の内湾においては成層化や風による影響をある程度受けて値が変化するものと思われる。

潮流パターンは、渦動粘性係数の変化に対して鈍感であると考えられるので、 β_h の値の決定には物質拡散シミュレーションを採用した。 β_h の値をいろいろ

変化させて、博多湾、有明海、鹿児島湾において2次元の潮流と物質拡散の数値シミュレーションを行い、拡散物質の濃度分布の計算結果が実測値と最も良く合うような β_0 の値を決定した。

潮流が支配的な内湾において β_0 の値と式(3.16)を用いれば、流れや拡散の特性に関する知識を必要とせずに容易に潮流と物質拡散のシミュレーションが行えることになる。

3.3.2 潮流と物質拡散のシミュレーション

2次元の潮流と物質拡散に関する基礎式は以下のようである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = & -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{h+\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_t \frac{\partial}{\partial x} (h+\zeta) U \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_t \frac{\partial}{\partial y} (h+\zeta) U \right\} \right) - \frac{\gamma^2}{h+\zeta} U \sqrt{U^2 + V^2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = & -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{h+\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu_t \frac{\partial}{\partial x} (h+\zeta) V \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \nu_t \frac{\partial}{\partial y} (h+\zeta) V \right\} \right) - \frac{\gamma^2}{h+\zeta} V \sqrt{U^2 + V^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (h+\zeta) U \} + \frac{\partial}{\partial y} \{ (h+\zeta) V \} = q \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{h+\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (h+\zeta) \varepsilon_t \frac{\partial C}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (h+\zeta) \varepsilon_t \frac{\partial C}{\partial y} \right\} + q' - qC \right] \quad (3.20)$$

ここで、 U 、 V = それぞれ鉛直方向に平均化した x 方向と y 方向の流速成分、
 ζ = 平均水位からの潮位、 h = 場所毎の平均水深、 f = Coriolisパラメーター、
 C = 拡散物質の濃度、 ε_t = 水平渦動拡散係数、 γ^2 = 摩擦係数、 q = 単位面積、
 単位時間当たりの濃度 C の流入フラックスである。

式(3.17)～(3.19)を離散化し、境界条件として湾の入り口において潮汐波を与えて潮流の数値計算を行った。図3-11に示すように、最初のステップでは式(3.17)における $V_m (\equiv \sqrt{U^2 + V^2}_{MAX})$ が未知であるから ν_t は一定値と仮定する。次に各格子上の計算された U 、 V と、仮定された β_b の値を用いて、式(3.17)より新しい ν_t が計算できる。この新しい ν_t を用いると潮流の計算を再び行うことができる。このプロセスを繰り返していくと仮定された β_b の値に対して潮流と渦動粘性係数の収束値が得られる。しかしながら、計算された潮流パターンは β_b に対して鈍感である上、実測値の U 、 V との比較から最良の β_b の値が得られるほど実測値 U 、 V に精度的な信頼はおけない。したがって、物質拡散のシミュレーションを行って最適な β_b の値を求める必要がある。

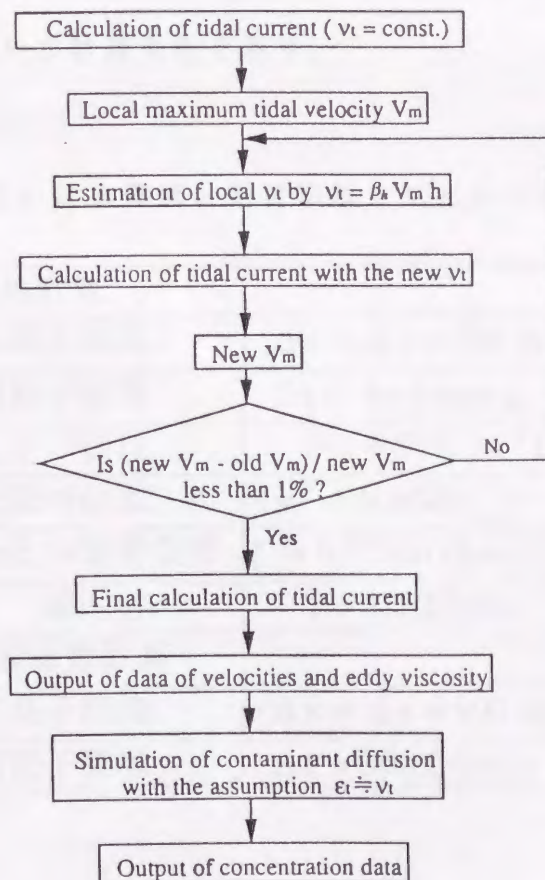


図3-11 潮流と物質拡散シミュレーションの計算手順

拡散物質の濃度 C に関する移流拡散方程式(式(3.20))を離散化し、上述の計算された潮流のデータと ε, κ, ν という仮定を用いて、物質拡散の計算を行う。高精度の移流の計算のために、Six-pointスキーム (Komatsu et al. (1985)) が採用された。計算された濃度 C の分布と実測値を比較して最適な β_0 の値が見つかるまでさまざまな β_0 の値に対してこれらの計算プロセスを繰り返し続けていく。

3.3.3 比例定数 β_0 の値の決定

流速、塩分濃度、水質、流入流量等の長い年月の実測データが集積されている博多湾、有明海、鹿児島湾において、上述の数値シミュレーションを適用した。博多湾においては、第1近似としてCODを保存物質と仮定した。表3-2に博多湾の場合に用いた計算条件を示す。

表3-2 博多湾における潮流と物質拡散シミュレーションの計算条件

(1) 潮流計算	
計算格子間隔	$\Delta x = \Delta y = 300$ (m)
時間格子間隔	$\Delta t = 10.0$ (sec.)
コリオリ係数	$f = 0.81 \times 10^{-4}$ (s^{-1})
海底摩擦係数	$\gamma^2 = 0.0026$
外海との境界条件	$\zeta = 0.57 \sin(2\pi t/T)$ (m)
周 期	$T = 12\text{h}25\text{min.}$
(2) 水質拡散計算	
計算格子間隔	$\Delta x = \Delta y = 900$ (m)
時間格子間隔	$\Delta t = 300.0$ (sec.)

β_0 の値をいろいろ試みた結果、 β_0 はおよそ10~20の値をとることが明らかとなった(図3-12)。

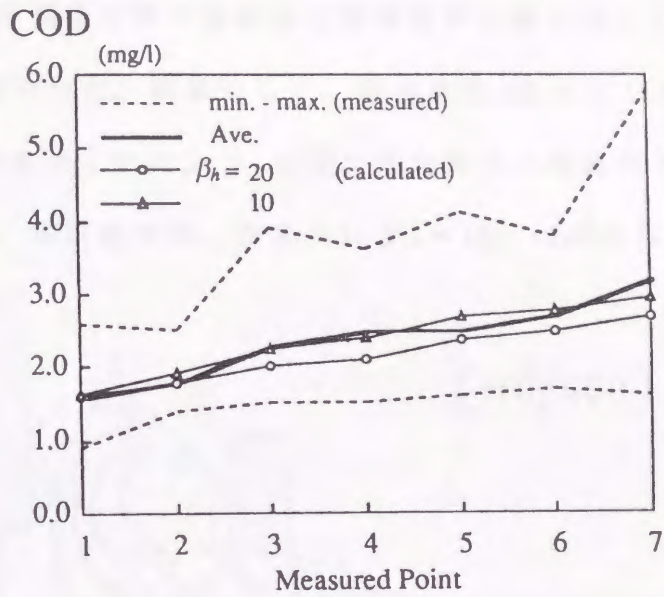


図 3 - 1 2 博多湾におけるCOD分布の計算値と実測値の比較

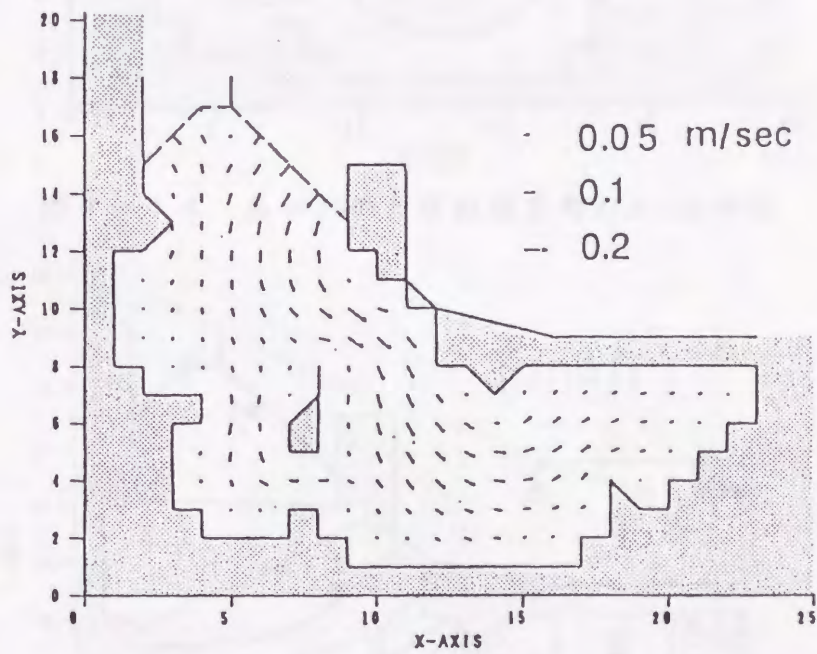


図 3 - 1 3 $\beta_h = 15$ のときの博多湾の潮流パターン(最大上げ潮時)

図 3 - 1 3 と図 3 - 1 4 は $\beta_h = 15$ のときの潮流パターンと $v_x (= \varepsilon_x)$ の分布を示している。図 3 - 1 3 の潮流パターンは、実測値と良く一致していること

が分かった。計算されたCODの分布が図3-15に示されている。図3-16は、有明海の塩分濃度分布の実測値と計算値の比較を示しており、この図より $\beta_h = 10 \sim 20$ が得られた。同様にして、鹿児島湾(図3-17)では、塩分濃度より $\beta_h = 30 \sim 40$ が求められた。 β_h の値は湾内海水の成層化や風の影響で少しばらついているが、本研究では、大まかに $\beta_h = 10 \sim 40$ が得られた。

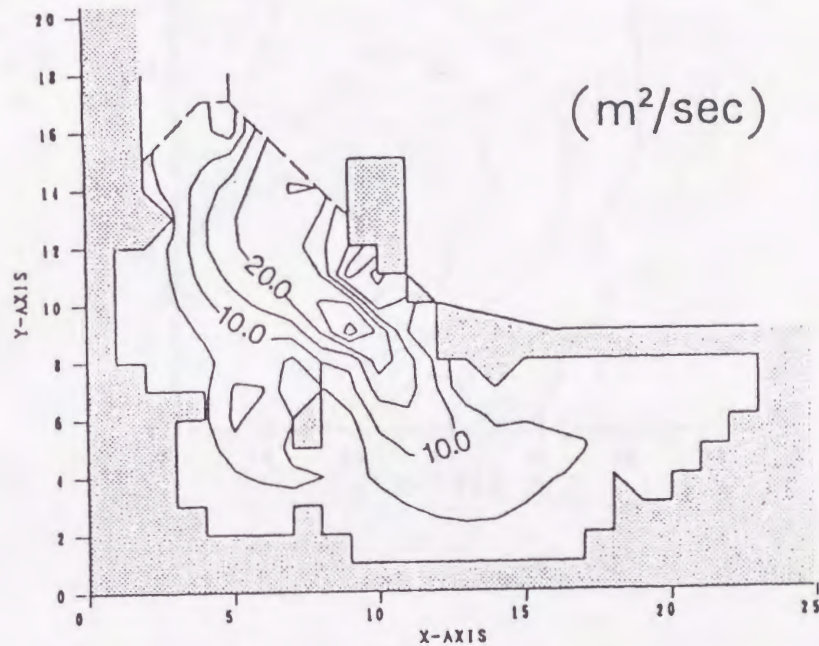


図3-14 $\beta_h = 15$ のときの博多湾の v の分布

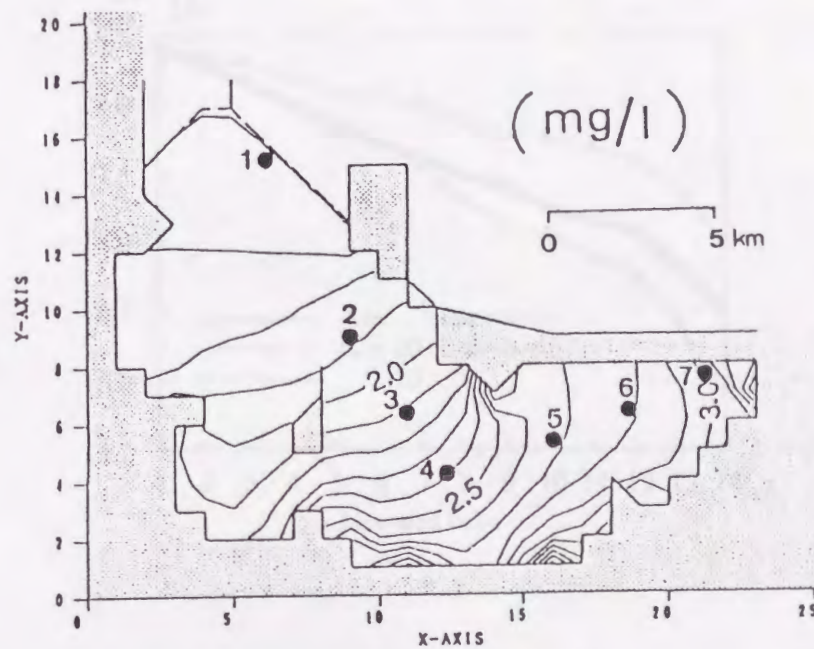


図3-15 計算で得られた博多湾のCOD分布

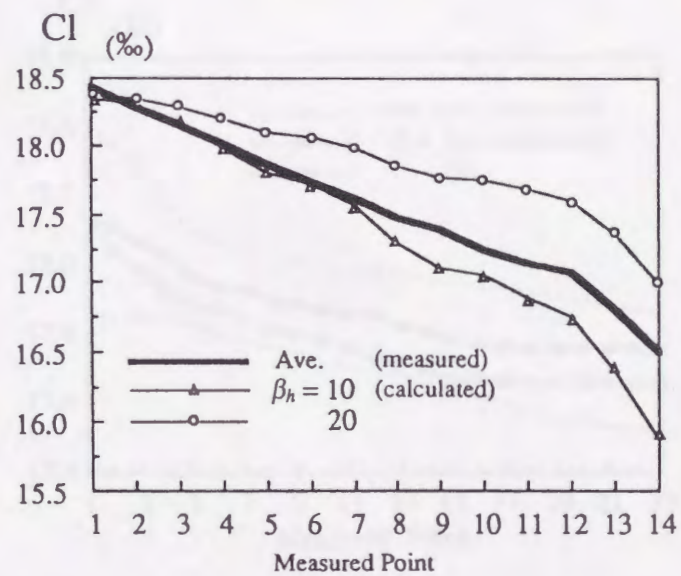
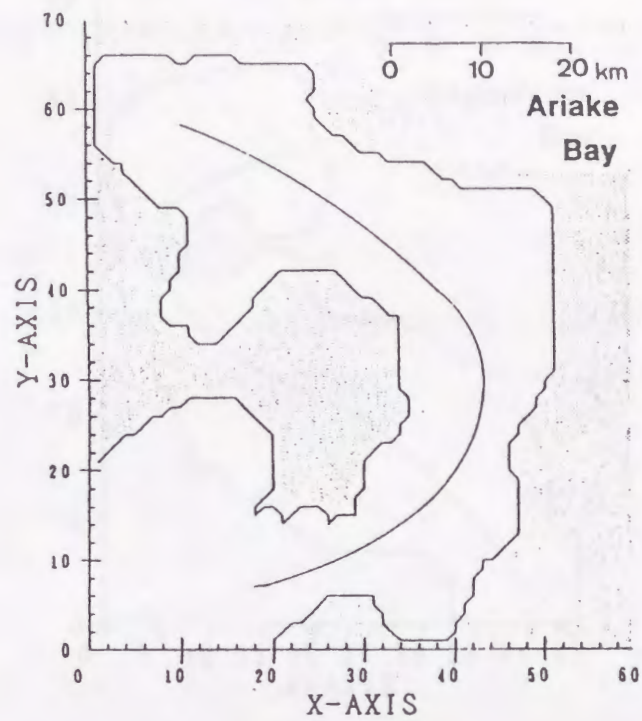


図 3 - 1 6 有明海における塩分濃度分布の計算値と実測値の比較

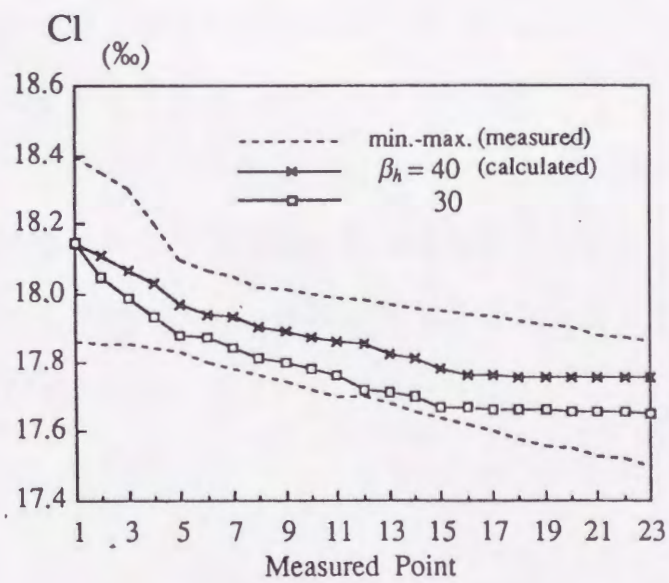
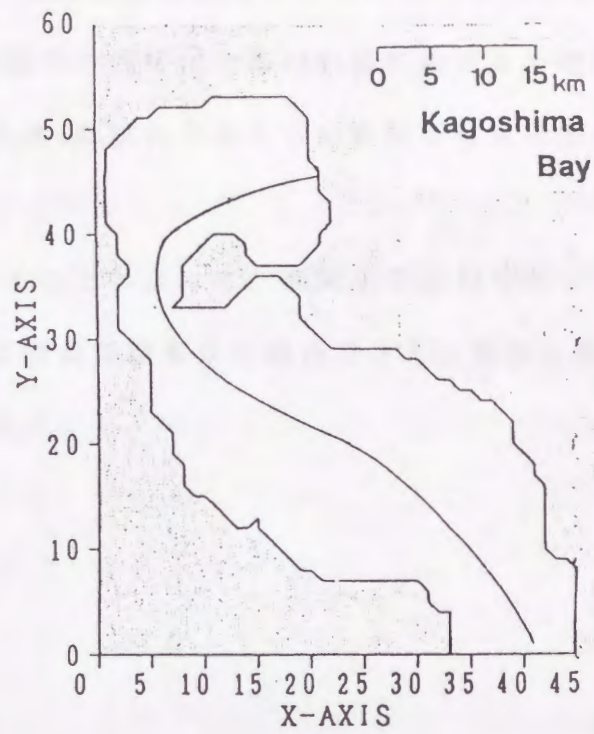


図 3 - 1 7 鹿兒島灣における塩分濃度分布の計算値と実測値の比較

3.3.4 まとめ

渦動粘性係数、渦動拡散係数に対する式(3.16)の β_s の値は、 $\beta_s = 10 \sim 40$ が得られた。 β_s は海水の成層化や風の影響を受けると増加する傾向にある。これらのファクターが β_s の値にどのくらい影響を与えるかは、今後の研究テーマとしたい。

β_s の値を用いることによって、潮流が支配的な湾における流れや拡散の特性に関して前もって何の知識もない場合でさえ、潮流と物質拡散の計算を行うことが可能となった。

3. 4 結言

この章では、移流の高精度計算法として前章で開発したSix-pointスキームを水域の拡散問題へ応用した。

まず、1次元移流拡散問題として瀬戸内海を取り上げ、Six-pointスキームを用いた塩分濃度分布の計算解と実測値を比較し、瀬戸内海の場所毎の拡散係数を推定することができた。この方法により、実際の水域における場所毎の代表流速・代表長さを用いることにより、容易に1次元の拡散シミュレーションを行うことが可能となった。また、このシミュレーションにより瀬戸内海の恒流流量の大きさと方向が推定できた。

次に、2次元移流拡散問題として博多湾、有明海、鹿児島湾における潮流と物質拡散のシミュレーションを行った。計算で用いる渦動粘性係数や渦動拡散係数を場所毎の代表流速、代表長さの積で表し、Six-pointスキームによる計算解と実測値の比較からその比例定数を求めた。得られた結果を用いることにより従前の流れや拡散能の情報がない場合でも、収束計算によって潮流と物質拡散のシミュレーションを行うことが可能となった。

以上のように、この章では、内湾・内海等、潮汐が拡散現象に大きく影響する水域における拡散係数・分散係数の評価法を開発できた。これは、前章で新たに開発・提案した移流のための高精度計算スキームを用いることによって初めて可能となったものであった。

第 4 章

非線型計算への拡張

4. 1 緒言

平均流による物理量の輸送、即ち移流は、水理学の実際的な問題において重要な役割を果たすことが多い。河川や湖沼における物質輸送の問題や、開水路の非定常問題において、質量や運動量の保存式は移流項を含んでいる。それらの移流項は正確に評価されなければならないにもかかわらず、その数値的取り扱いは非常に困難である。近年、拡散方程式等の線型の移流方程式の計算においては、特性曲線法に基づいたいくつかの精度の良い計算法が開発されてきた (Holly-Preissmann(1977), Komatsu et al.(1985))。

一方、非線型移流については、例えば、開水路非定常流について見ると、ダム破壊、水門の緊急開放・閉塞等によって生じる時間的変化の急な流れは、非線型移流項の卓越した流れであり、水面等の不連続部を形成することが多い。不連続部を境にして上流と下流で流れの性質が異なり、全ての領域を単一の数値シミュレーションで精度良く解くのは非常に困難であり、このような流れの数値計算法はまだ十分には確立されているとは言えない。

Toda-Holly(1988)は、特性曲線法に基づいたHolly-Preissmannスキームを非線型方程式の解法へ拡張し、線型の場合と同様高い精度で計算が可能であることを示した。しかし、この方法は、各格子点で各時間ステップ毎にクーラン数に関する3次方程式を解く必要があり、特に純粹移流の場合にはクーラン数の値に対する制約が厳しかった。またこのスキームの性質上、従属変数の勾配まで移

流計算する必要があり、結果として精度を落としてしまう可能性が大きかった。

本章では、著者らの開発したSix-pointスキーム (Komatsu et al. (1985)) を非線型の場合に拡張することによって、Toda-Hollyスキーム以上の高精度を有しかつ計算が大幅に単純化された新しい計算法を提案する。そして、上述の非線型移流項の卓越した不連続部を形成する流れの数値計算に適用してその有効性を検証する。

4. 2 1次元Burger's方程式に対する高精度数値計算スキームの開発

4.2.1 Six-pointスキームの非線型移流計算への拡張

まず、最も簡単な非線型方程式の1つである1次元のBurger's方程式の計算について検討する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

ここで、 $u(x, t)$ は流速、 ν は拡散係数である。この方程式は、Navier-Stokes方程式の非線型性と同様の性質を持ち、乱流・衝撃波の問題の原型方程式と見なされて差分法の精度の検証等に利用されて来た。式(4.1)の特性曲線表示は

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad \text{上で} \quad \frac{du}{dt} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

である。ここでは、移流と拡散を各時間ステップ毎に各々別個に取り扱うスプリット・オペレーター・アプローチを採用することによって、各々の計算に対して最良の計算スキームを選ぶことを可能にした。したがって、数値計算が難しいとされている以下のような非線型移流についてだけ独立にその計算法を工夫することができる。

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad \text{上で} \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

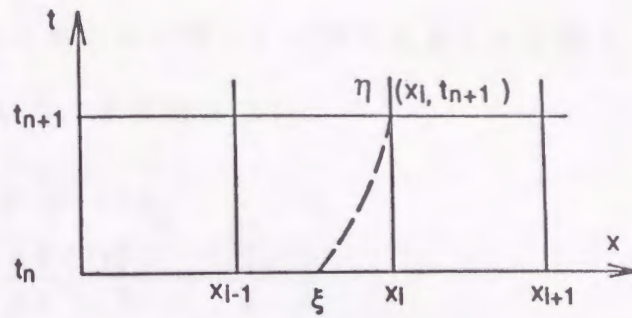


図 4 - 1 1次元計算格子

式(4.3)は特性曲線上で流速 $u = \text{一定}$ を意味している。図 4 - 1 における破線は、点 $\eta (x_i, t_{n+1})$ に到達する特性曲線を表しており、この曲線の $t = t_n$ における位置を ξ とすれば次式が得られる。

$$u_{\eta} = u_{\eta} = u_{\xi} \quad (4.4)$$

ここで、添字 n は時間 t_n を表し、 i は計算格子点 x_i を表す。 u_{η} 、 u_{ξ} は各々、特性曲線の η 、 ξ における流速である。

Six-pointスキームは、この格子上にない流速 u を格子上の既知の値で内挿する方法である (Komatsu et al. (1985))。

$$u_{\xi} = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 \quad (4.5)$$

ここで、 α はクーラン数、 $a_0 \sim a_3$ は計算格子上の既知の流速の値から求まる係数である。

しかし、ここで、クーラン数 α は、残念ながら未知数であり、移流の計算を Six-pointスキームを用いて計算するためには従属変数である流速 u と直接関係するこのクーラン数をまず評価しなければならない。

Toda-Holly(1988)は、Holly-Preissmannスキームに基づいた3次方程式を解いて α の値を求めているが、本節では、第1近似として式(4.1)の左辺を保存型表

示したのち、後方差分を用いてクーラン数を決定した。こうして得られたクーラン数をSix-pointスキームに代入して再度流速 u を計算し、両者の荷重平均を最終的な u の値とした。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_i^{n+1}} &= \kappa \overline{u_i^{n+1}} + (1-\kappa) u_\xi \\ \overline{u_i^{n+1}} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{(u_i^n)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^n)^2}{2} \right) \\ u_\xi &= a_0 + a_1 \overline{\alpha} + a_2 \overline{\alpha}^2 + a_3 \overline{\alpha}^3 \\ \overline{\alpha} &= \frac{u_i^{n+1} \Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

多くの数値実験の結果、1次元Burger's方程式に対しては荷重 $\kappa = 0.72$ が最も良い結果を与えた。

4.2.2 衝撃波のモデル計算例

前節で導いた非線型方程式の計算法を用いて、いくつかの厳密解が分かっている非線型のモデル計算を行い、その適用性について検討した。そのうちの一例についてここでは紹介する。

拡散なしに下流へ伝わる理想化された衝撃波 (Lax(1954)) を考える。これは、急峻なフロントをもつ波の伝播の一例である。初期条件

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & (x-x_0 < 0) \\ 0 & (x-x_0 \geq 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

の時、解析解は次のように求まっている。

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & ((x-x_0)/t \leq 1/2) \\ 0 & ((x-x_0)/t > 1/2) \end{cases} \quad (4.8)$$

式(4.8)は、解析解が波速1/2で下流へ伝播する不連続波であることを示している。計算条件は、以下のものである。

Case a-1: $\Delta x=0.01$, $\Delta t=0.01$, $t=0.2, 0.4, 0.6$

Case a-2: $\Delta x=0.01$, $\Delta t=0.005$, $t=0.2, 0.4, 0.6$

共通のパラメーターとして $x_0=2\Delta x$ 、境界条件 $u(0,t)=1.0$ を用いた。図 4-2 は Case a-1 の計算結果であり、図 4-3 は Case a-2 の計算結果である。図 4-2 には比較のために Lax-Wendroff スキームの計算結果も描かれている。Lax-Wendroff スキームでは、位相誤差はあまりない代わりに振幅誤差が見られる。一方、Toda-Holly スキームや式 (4.6) による計算結果は振幅誤差に対しては非常に良い精度を示している。ただ、Toda-Holly スキームは式 (4.6) のスキームに比べてより大きい位相誤差がある。また、図 4-3 では、Lax-Wendroff スキームは大きい位相誤差を生じ、一方、その他のスキームは Case a-1 と同様の精度の良い結果を与えている。

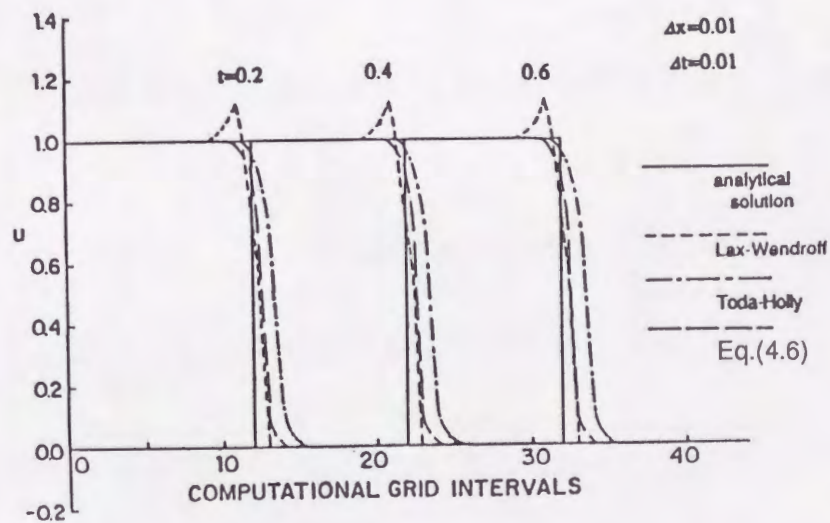


図 4-2 急峻なフロントをもつ波の伝播 (Case a-1)

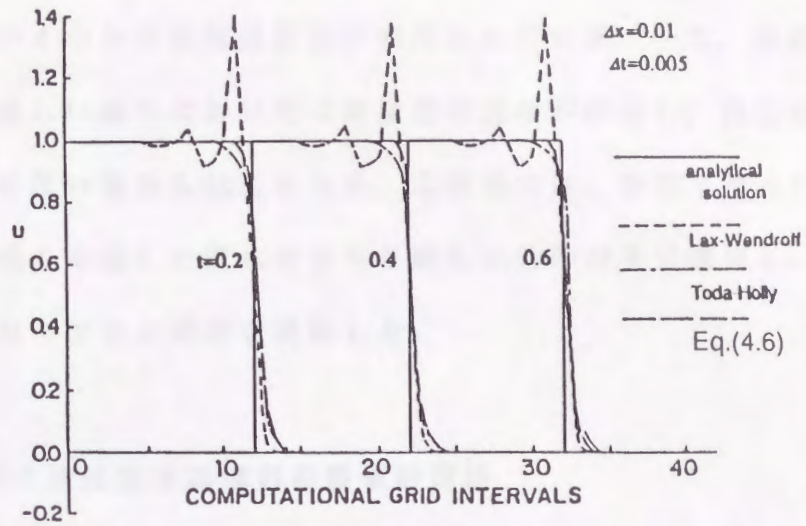


図 4 - 3 急峻なフロントをもつ波の伝播 (Case a-2)

4. 3 非線型移流項の卓越した流れの計算への適用

洪水流に代表されるような時間的変化の緩やかな、不連続部のない流れにおいては、既にいくつかの数値計算法が利用されている。一方、不連続部を含む、時間的変化の激しい流れにおいては非線型移流項が卓越し、通常の数値計算法では実用に適さない場合も起こりうる。本研究では、前節で得られた計算手法を非線型移流項の卓越した流れのような厳しい条件の下で適用し、段波等のモデル計算を行なってその精度を検証した。

4.3.1 非定常1次元開水路流れの数値計算法

St. Venantの仮定に基づく1次元開水路の非定常流れの支配方程式は次式で表わされる。ただし、水路は一様断面で摩擦のない水平な開水路であるとする。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{2} h^2 \right) = 0 \quad (4.10)$$

ここで、 q は単位幅当りの流量、 h は水深、 g は重力加速度を示している。方程式(4.10)を特性曲線表示すると、

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{q}{h} \quad \text{上で} \quad \frac{dq}{dt} + \left(gh - \frac{q^2}{h^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

であり、特性曲線上で上式を積分すると次式が得られる。

$$x_\eta - x_\xi = \int_{t_\xi}^{t_\eta} 2 \frac{q}{h} dt, \quad q_\eta - q_\xi + \int_{t_\xi}^{t_\eta} \left(gh - \frac{q^2}{h^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} dt = 0 \quad (4.12)$$

ここで、 ξ と η は、4.2と同様に特性曲線の出発点と到着点を表わす。 ξ における水深 h_ξ と単位幅流量 q_ξ を1次精度風上差分スキームとSix-pointスキ

—ムの荷重平均として求めて式(4.9)と(4.12)を差分化すると次式が得られる。

$$\left\{ \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{2\Delta t} + \frac{h_{i-1}^{n+1} - h_{i-1}^n}{2\Delta t} \right\} + \left\{ \theta \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{\Delta x} \right\} = 0 \quad (4.13)$$

$$q_i^{n+1} - q_\xi + \left[\left\{ g h_i^{n+1} - \frac{(q_i^{n+1})^2}{(h_i^{n+1})^2} \right\} \frac{h_i^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \theta + \left\{ g h_\xi - \frac{(q_\xi)^2}{(h_\xi)^2} \right\} \frac{h_i^n - h_{i-1}^n}{\Delta x} (1-\theta) \right] \Delta t = 0 \quad (4.14)$$

ここに

$$\bar{h}_\xi = \kappa \bar{h}_\xi + (1-\kappa) \bar{h}_\xi$$

$$\bar{q}_\xi = \kappa \bar{q}_\xi + (1-\kappa) \bar{q}_\xi$$

$$\bar{h}_\xi = \bar{h}_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i-1}^n - q_i^n) + h_i^n$$

$$\bar{q}_\xi = \bar{q}_i^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{(q_i^n)^2}{h_i^n} - \frac{(q_{i-1}^n)^2}{h_{i-1}^n} \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{g}{2} \{ (h_i^n)^2 - (h_{i-1}^n)^2 \} \right] + q_i^n$$

$$\bar{h}_\xi = a_0 + a_1 \bar{\alpha} + a_2 \bar{\alpha}^2 + a_3 \bar{\alpha}^3$$

$$\bar{q}_\xi = b_0 + b_1 \bar{\alpha} + b_2 \bar{\alpha}^2 + b_3 \bar{\alpha}^3$$

$$\bar{\alpha} = \frac{dx}{dt} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 2 \frac{q}{h} \frac{\Delta t}{\Delta x} = 2 \frac{\bar{q}_\xi}{\bar{h}_\xi} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

式中の $a_0 \sim a_3$ は水位 h_j ($j=i-3, i-2, \dots, i+2$) より求まる係数で、 $b_0 \sim b_3$ は単位幅流量 q_j ($j=i-3, i-2, \dots, i+2$) により求まる係数である。また、 θ は時間方向の重み係数である。

式(4.14)は非線型であるため h^{n+1} と q^{n+1} についてこのままでは解けない。

したがって線形化するため次の式を仮定し、

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n + \Delta h_i \\ q_i^{n+1} &= q_i^n + \Delta q_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

式(4.13), (4.14)に代入し、 Δh , Δq の2乗以上の高次の項を省略すれば、次の線形系が得られる。

$$\begin{aligned} A_i \Delta h_{i-1} + B_i \Delta q_{i-1} + D_i \Delta h_i + E_i \Delta q_i &= F_i \\ A'_i \Delta h_{i-1} + B'_i \Delta q_{i-1} + D'_i \Delta h_i + E'_i \Delta q_i &= F'_i \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここで

$$A_i = \frac{1}{2\Delta t}, \quad B_i = -\frac{\theta}{\Delta x}, \quad D_i = \frac{1}{2\Delta t}, \quad E_i = \frac{\theta}{\Delta x}, \quad F_i = \frac{q_{i-1}^{\eta} - q_i^{\eta}}{\Delta x}$$

$$A'_i = \frac{\theta}{\Delta x} \left\{ \frac{(q_i^{\eta})^2}{(h_i^{\eta})^2} - g h_i^{\eta} \right\}, \quad B'_i = 0, \quad D'_i = \frac{\theta}{\Delta x} \left\{ g(2h_i^{\eta} - h_{i-1}^{\eta}) + \frac{(q_i^{\eta})^2}{(h_i^{\eta})^3} (h_i^{\eta} - 2h_{i-1}^{\eta}) \right\}$$

$$E'_i = -2 \frac{q_i^{\eta}}{(h_i^{\eta})^2} (h_i^{\eta} - h_{i-1}^{\eta}) \frac{\theta}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta t}$$

$$F'_i = -\frac{q_i^{\eta} - q_{\xi}^{\eta}}{\Delta t} - \left[\theta \left\{ g h_i^{\eta} - \frac{(q_i^{\eta})^2}{(h_i^{\eta})^2} \right\} + (1-\theta) \left\{ g h_{\xi}^{\eta} - \frac{q_{\xi}^{\eta 2}}{h_{\xi}^{\eta 2}} \right\} \right] \frac{h_i^{\eta} - h_{i-1}^{\eta}}{\Delta x}$$

上式をDouble Sweep Method等(Cunge et al.(1980))を利用して Δh_i と

Δq_i について解けば h^{n+1} と q^{n+1} が求まる。

4.3.2 段波のモデル計算例

解析解の分かっている2つの場合について数値実験を行なった。

(a) 上流へ進行する段波の形成される場合

摩擦のない水平な開水路を水深2m、単位幅流量 $2\text{m}^2/\text{s}$ の水が流れている時、 $t=0$ で下流端のスルースゲートが一瞬のうちに閉じられると、段波が一定の波速で上流へ伝播する。その様子を示しているのが図4-4である。計算条件は $\Delta x=0.02\text{m}$ 、 $\Delta t=0.004\text{s}$ であり、タイムステップ $n=50$ 、 100 の時の計算結果が示されている。Toda-Hollyスキームと比較して見ると、スムージングはやや増加しているが、不連続部で振動が抑えられている。最適な重み係数の値は $\kappa=0.3$ 、 $\theta=0.81$ であった。

(b) 下流へ進行する段波の形成される場合

摩擦のない水平な開水路で水深1m、単位幅流量 $0\text{m}^2/\text{s}$ の水が貯っている所へ、上流端より突然、流量 $2\text{m}^2/\text{s}$ の水が解放される場合を考える。このとき生じる段波は静水の上を一定の波速で下流へ向かって伝播する。図4-5はこのときの様子を示しており、計算条件は $\Delta x=0.02\text{m}$ 、 $\Delta t=0.005\text{s}$ を使用し、タイムステップ $n=40$ 、 80 の結果が描かれている。Toda-Hollyスキームとほとんど同じ計算結果であるが、若干スムージングは増加しているようである。最適な重み係数は、 $\kappa=0.72$ 、 $\theta=0.63$ であった。

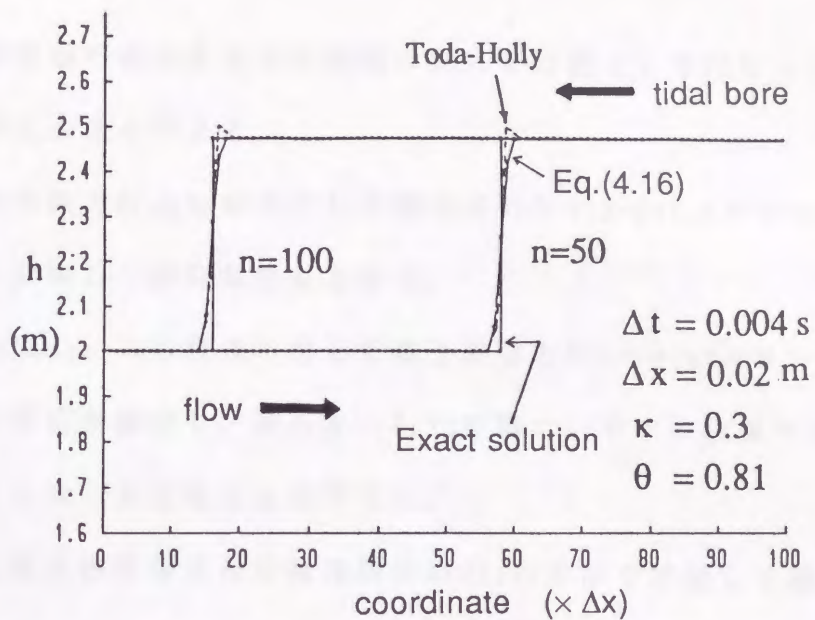


図 4 - 4 上流へ進行する段波の計算

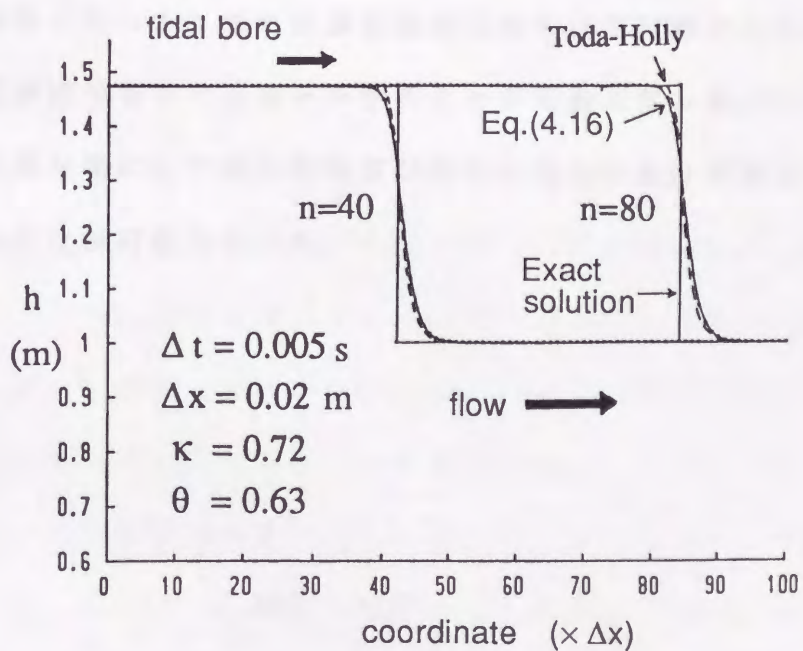


図 4 - 5 下流へ進行する段波の計算

4. 4 結言

非線型移流項の高精度数値計算法の開発を目標として行なった本節の研究の主な結論は次の通りである。

- (1) 線形の移流方程式の解法として開発されたSix-pointスキームを非線型移流項へ拡張し、良好な結果を得た。
- (2) 1次元Burger's方程式に対して風上差分とSix-pointスキームを組み合わせた計算法を開発し、重み $\kappa = 0.72$ を得た。モデル計算では非常に精度良くシミュレートすることができた。
- (3) 1次元開水路非定常流の数値解析に(2)の手法を拡張して適用し、段波等の不連続部が形成される時間的変化の急な流れを解析した。その結果、精度の良い計算結果が得られたが、そのときの最適な重み κ 及び θ の値は必ずしも普遍的な定数ではないようであり、今後の研究の課題となった。
- (4) Toda-Hollyスキームの欠点であったクーラン数に関する3次方程式を解く必要はなくなった。また従属変数の勾配も移流計算することなく高精度に非線型移流項をシミュレートすることが可能となった。
- (5) 不連続部を境にして流れの性質が異なる場合でも計算領域を分割せずに計算することが可能となった。

第 5 章

結 論

本論文では、大気中や地中、水域などにおける汚染物質の拡散数値シミュレーションを行うための有効な手法について述べた。高い精度で物質拡散をシミュレートするためには

(1) 移流拡散方程式の高精度数値計算法の開発

(2) 現象を支配する拡散係数の正確な推定

の 2 点が不可欠であった。

第 2 章では、通常の差分では無視できない誤差が生じる移流項の特性について述べ、目的(1)のため従来の計算法に代わるべき Six-point スキーム、改良型 Six-point スキーム、SOWMAC スキームの 3 種類のスキームを提案した。

Six-point スキームは、Holly-Preissmann スキームの短所である多次元への拡張の難しさをなくした有用な計算法であった。改良型 Six-point スキームにおいては、Six-point スキームの打ち切り誤差をできるだけ小さくするような修正項を導入し、2次元、3次元問題でも精度の劣化が起きないように工夫を行った。SOWMAC スキームは、1階の移流方程式を解く代わりに2階の波動方程式を解くという全く新しい概念に基づいた計算法で、特性曲線法やスプリット・オペレーター・アプローチなどの考え方も組み込まれた。使用する格子点も僅か3点とコンパクトで計算精度も高い非常に有用な方法であることを示した。

第 3 章では、移流項の高精度計算法として開発された Six-point スキームを実際の水域での拡散問題に適用することにより、潮流の卓越した内湾・内海においても拡散係数を正確に推定することが可能となることを示した。1次元拡散

問題においては、瀬戸内海を対象に場所毎の拡散係数の定量的評価を行った。2次元拡散問題では、博多湾・有明海・鹿児島湾を対象として拡散シミュレーションを行った。Reynoldsの相似に基づいて渦動拡散係数と渦動粘性係数を等しいとおき、潮流と物質拡散の両方の収束計算より場所毎の拡散係数を評価することによって、従前の流れや拡散能の情報なしに内湾・内海での潮流と拡散のシミュレーションができることを示した。

第4章では、前章で開発した移流の高精度計算法を非線型の計算に拡張した。Six-pointスキームと1次精度風上差分を組み合わせることにより、衝撃波や非線型移流項の卓越した段波などの計算を精度良く行えることを示した。

以上のように、本論文では移流の高精度計算法の開発・提案と、それによって可能となった水域における拡散係数の正確な評価法について示した。これまで困難とされてきた物質拡散シミュレーションに対して、移流の高精度計算法と拡散係数の正確な評価法を組み合わせることで、合理的でルーチン化された計算手法が適用できることが分かった。

なお、今後の問題点として、

- (a) SOWMACスキームの非線型問題への拡張
- (b) SOWMACスキームのデカルト座標以外への拡張性の検討
- (c) 混合現象が、潮流以外の要因による場合の拡散能の評価法の確立
- (d) 拡散数値シミュレーションの移流項の計算法として従来より用いられている種々のスキームの守備範囲の確認

の4点が挙げられる。今後の研究課題としたい。

謝 辞

本研究は、九州大学工学部水工土木学科の小松利光教授のご指導の下に行われたものである。本研究の遂行と本論文のとりまとめにあたり、終始親身になって有益なご指導ご助言をいただきました小松教授に心より感謝の意を表します。

佐賀大学理工学部 of 岸原信義教授、渡辺訓甫助教授には、常日頃より暖かいご指導をいただきました。また、佐賀大学理工学部建設系の諸先生方及び九州大学大学院総合理工学研究科松永信博助教授には、終始励ましの言葉をいただきました。記して心より感謝の意を表します。

さらに、九州大学工学部水工土木学科の平野宗夫教授、造船学科の中武一明教授、貴島勝郎教授には、本論文全般にわたり貴重なご助言をいただきましたことを深く感謝いたします。

最後に、九州大学工学部水工土木学科第1講座応用水理学研究室の朝位孝二助手をはじめ研究室の皆様には、多くの面で暖かいご協力をいただきました。深く感謝いたします。

参 考 文 献

1. Baptista, A.M., E.E. Adams and K.D. Stolzenbach: Comparison of several Eulerian-Lagrangian models to solve the advection-diffusion equation, Proceedings of 2nd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Iowa, USA, pp.B11-1-B11-9, 1985.
2. Bella, D.A. and W.E.Dobbins: Difference modeling of stream pollution, Journal of Sanitary Engineering Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol.94, No.SA5, pp.995-1016, 1968.
3. Book, B.L., J.P. Boris and K. Hain: Flux-corrected transport II, Generalizations of the method, Journal of Computational Physics, Vol.18, pp.248-283, 1975.
4. Boris, J.P. and D.L. Book: Flux-corrected transport I, SHASTA, a fluid transport algorithm that works, Journal of Computational Physics, Vol.11, pp.38-69, 1973.
5. Cunge, J.A., F.M. Holly Jr. and A. Verwey: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, Iowa Institute of Hydraulic Research, 1980.
6. Elder, J.W.: The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, Journal of Fluid Mechanics, Vol.5, pp.544-560, 1959.
7. Fischer, H.B.: The mechanics of dispersion in natural streams, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American

- Society of Civil Engineers, Vol. 93, No. HY6, pp. 187-216, 1967.
8. Fischer, H. B.: Mass transport mechanisms in partially stratified estuaries, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 53, pp. 671-687, 1972.
 9. Fischer, H. B., E. J. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger and N. H. Brooks: *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, pp. 279-314, 1979.
 10. Forrester, C. K.: Higher order monotonic convective difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 23, pp. 1-22, 1977.
 11. Fromm, J. E.: A method for reducing dispersion in convective difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 3, pp. 176-189, 1968.
 12. Glass, J. and W. Rodi: A higher order numerical scheme for scalar transport, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 31, pp. 337-358, 1982.
 13. Hansen, D. V. and M. Rattray, Jr.: Gravitational circulation in straits and estuaries, *Journal of Marine Research*, Vol. 23, pp. 104-122, 1965.
 14. 速水頌一郎, 宇野木早苗: 瀬戸内海における海水の交流と物質の拡散, 第17回海岸工学講演会論文集, pp. 385-393, 1970.
 15. 日高孝次: 瀬戸内海の東向流について, *海と空*, Vol. 17, pp. 100-104, 1937.
 16. 樋口明生, 柳哲雄, 柏井誠: 三河湾における潮流による拡散の水理模型実験について, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 361-365, 1974.
 17. 平野敏行編: 沿岸域保全のための海の環境科学, 恒星社厚生閣, pp. 3-79, 1983.

18. Holley, E.R., D.R.F. Harleman and H.B. Fischer: Dispersion in homogeneous estuary flow, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 96, No. HY8, pp. 1691-1709, 1970.
19. Holly, F.M., Jr. and A. Preissmann: Accurate calculation of transport in two dimensions, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 103, No. HY11, pp. 1259-1277, 1977.
20. Holly, F.M., Jr. and T. Komatsu: Derivative approximations in the two-point fourth-order method for pollutant transport, Proceedings of the Conference on Frontiers in Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers, 1983.
21. Holly, F.M., Jr. and J.M. Usseglio-Polatera: Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow, Journal of Hydraulic Engineering, American Society of Civil Engineers, Vol. 110, No. 7, pp. 905-926, 1984.
22. 伊東剛編: 数値解析の応用と基礎, アテネ出版, pp. 1-27, 1971.
23. Joseph, J. and H. Sendner: Über die horizontale diffusion im Meere, Dt. Hydrogr. Z. 11(2), 1958.
24. 金子安雄, 堀江毅, 村上和男: 大阪湾の潮流と汚染拡散 - 模型実験と数値計算とによる検討, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 309-314, 1974.
25. 建設省河川局: 流量年表, 1984-1986.
26. 小松利光, F.M. Holly Jr.: 河川や沿岸部における物質拡散の数値計算法, 第28回水理講演会論文集, pp. 289-295, 1984.

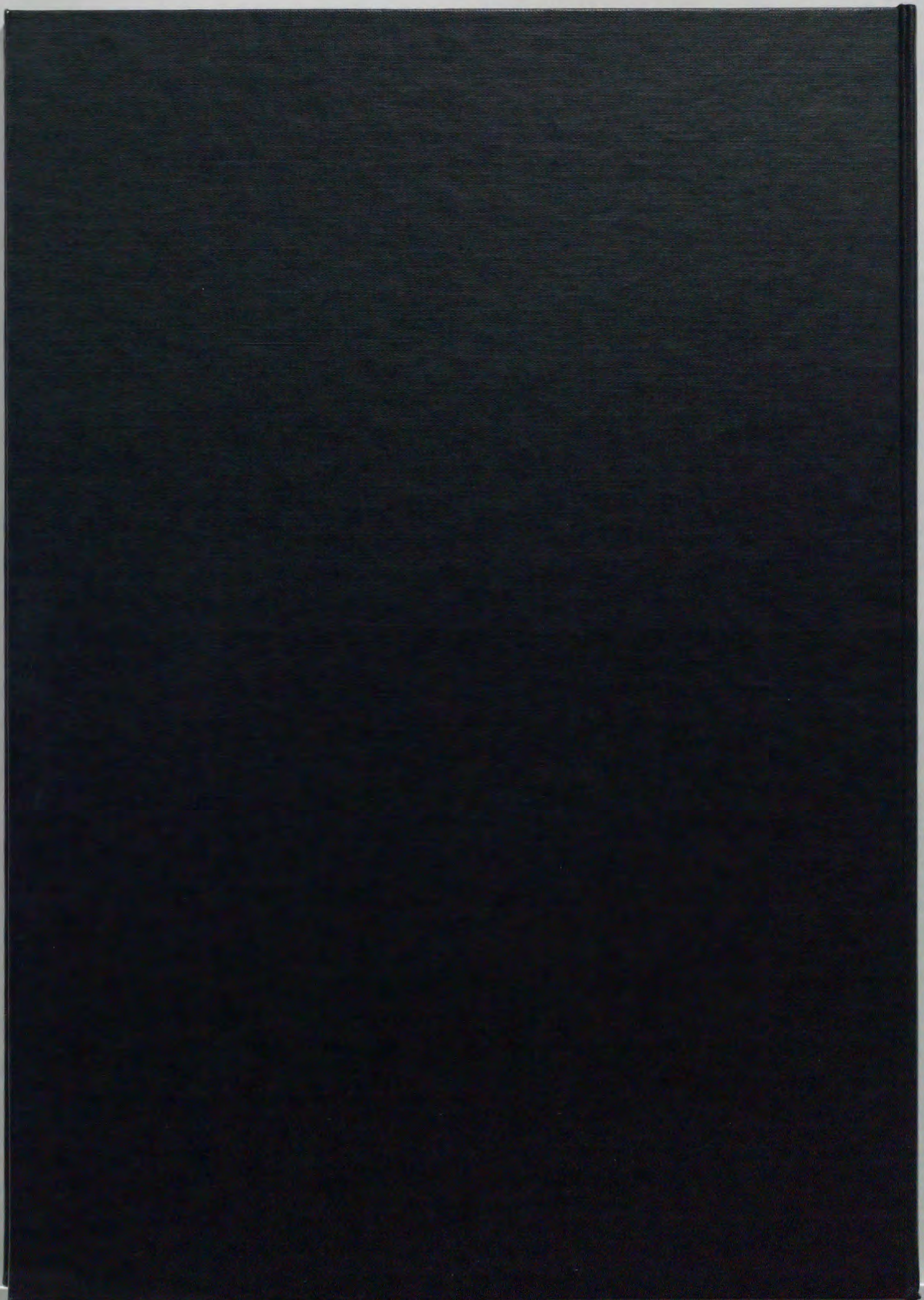
27. Komatsu, T., F.M. Holly Jr. and N. Nakashiki: Numerical calculation of pollutant transport in rivers and coastlines, Proceedings of 4th Congress of APD, IAHR, Chiangmai, Thailand, pp.847-860, 1984.
28. 小松利光, 仲敷憲和, 大串浩一郎: 河川や沿岸部における拡散物質の輸送拡散の計算法, 第31回海岸工学講演会論文集, pp.635-639, 1984.
29. 小松利光, 古本勝弘, 仲敷憲和, 大串浩一郎: 2次元水域における汚濁物質の拡散予測法, 第29回水理講演会論文集, pp.757-762, 1985.
30. Komatsu, T., F.M. Holly Jr., N. Nakashiki and K. Ohgushi: Numerical calculation of pollutant transport in one and two dimensions, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol.3, No.2, pp.15-30, 1985.
31. Komatsu, T., N. Nakashiki and K. Ohgushi: Pollutant transport simulation in one and two dimensions, Proceedings of 2nd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Iowa, USA, pp.H22-1-H22-11, 1985.
32. Komatsu, T., K. Ohgushi, K. Asai and N. Nakashiki: A refined numerical scheme for scalar advective transport, Proceedings of Specialised Conference on Coastal and Estuarine Pollution, Fukuoka, Japan, pp.202-209, 1987.
33. 小松利光, 大串浩一郎, 朝位孝二, 仲敷憲和: 貯水池や河口部における移流拡散の高精度計算法, 第32回水理講演会論文集, pp.287-292, 1988.
34. 小松利光, 大串浩一郎, 朝位孝二: 拡散物質の移流拡散の高精度計算法, 第3回生研NSTシンポジウム講演論文集, pp.5-11, 1988.

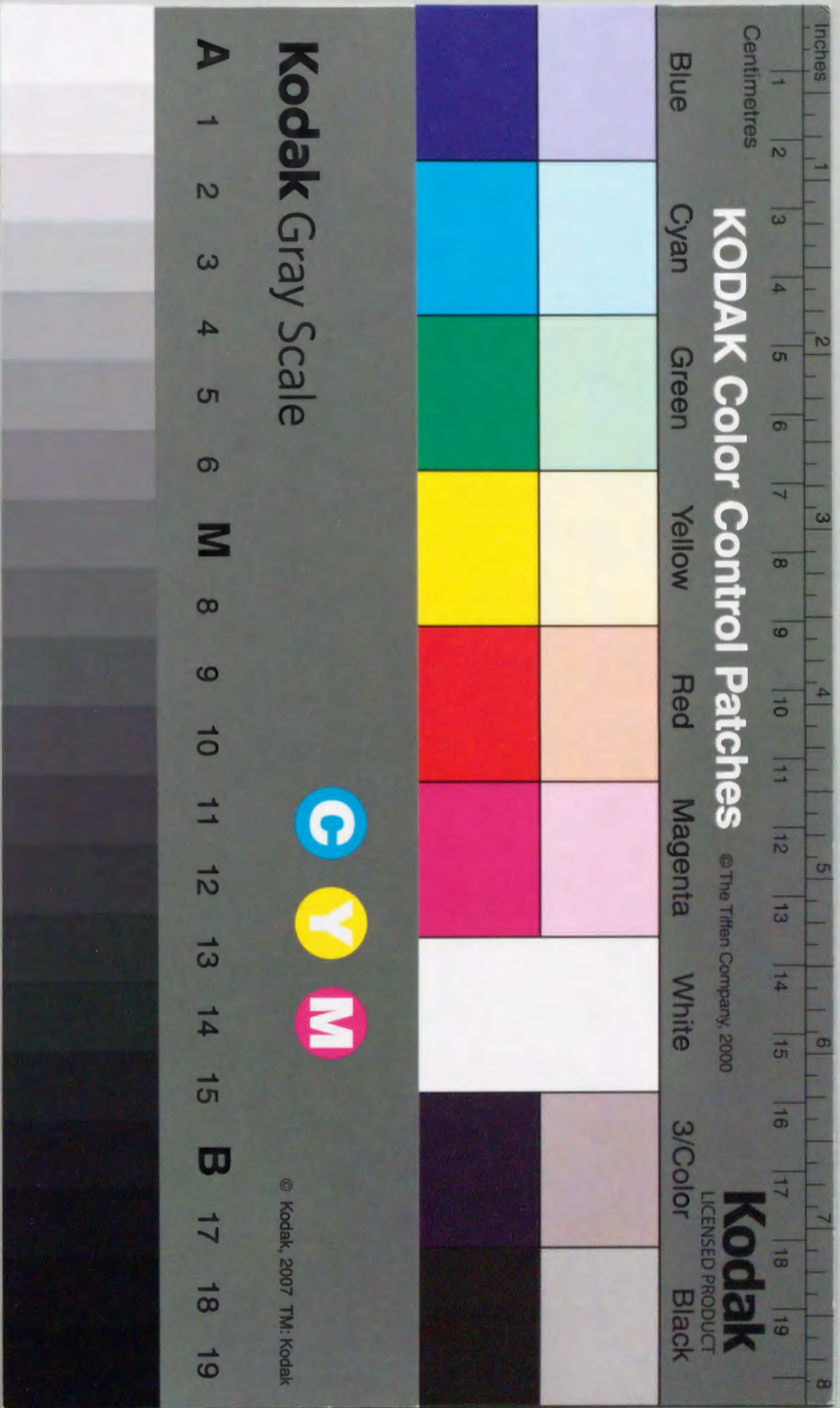
35. Komatsu, T., K. Ohgushi, K. Asai and N. Nakashiki: Development of an accurate numerical scheme for scalar advective transport, Proceedings of 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, pp.167-174, 1988.
36. Komatsu, T., K. Ohgushi, K. Asai and F.M. Holly Jr.: Accurate numerical simulation of scalar advective transport, Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, Vol.7, No.1, pp.63-73, 1989.
37. 小松利光, 相良誠, 朝位孝二, 大串浩一郎: 瀬戸内海における物質の拡散係数の評価, 海岸工学論文集, 第36巻, pp.804-808, 1989.
38. 小松利光: 環境水理学における拡散問題, 第26回水工学に関する夏期研修会講義集, Aコース, 土木学会水理委員会, pp.A-3-1-A-3-25, 1990.
39. Komatsu, T., S. Yano, Y. Matsunaga and K. Ohgushi: Simulations of tidal current and pollutant diffusion in a bay, Proceedings of International Symposium on Environmental Hydraulics, Hong Kong, pp.847-852, 1991.
40. 小松利光, 大串浩一郎, 朝位孝二: 拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発, 土木学会論文集, 1992(投稿中).
41. Lax, P.D.: Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical applications, Communications on Pure And Applied Mathematics, Vol.7, pp.159-193, 1954.
42. Lax, P. and B. Wendroff: Systems of conservation laws, Communications on Pure And Applied Mathematics, Vol.13, pp.217-237, 1960.

43. Leendertse, J. J.: A water-quality simulation model for well-mixed estuaries and coastal seas, Vol.1, Principles of Computation, Rand Corporation Memorandum, RM-6230-RC, February, 1970.
44. Leith, C. E.: Numerical simulation of the Earth's atmosphere, Methods in Computational Physics, Vol.4, pp.1-28, 1965.
45. Leonard, B. P.: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.19, pp.59, 1979.
46. Martin, B.: Numerical representations which model properties of the solution to the diffusion equation, Journal of Computational Physics, Vol.17, pp.358-383, 1975.
47. 大串浩一郎, 小松利光, 朝位孝二: 非線型方程式の数値解法について, 第4回生研NSTシンポジウム講演論文集, pp.105-112, 1989.
48. Ohgushi, K., T. Komatsu and K. Asai: Computation of nonlinear advection term with high accuracy, Proceedings of 23rd Congress of International Association for Hydraulic Research, Ottawa, Canada, pp.D-231-D-238, 1989.
49. 大串浩一郎, 小松利光, 朝位孝二: 非線型移流項の卓越した流れの計算, 水工学論文集, 第34巻, pp.647-652, 1990.
50. Ohgushi, K., T. Komatsu and K. Asai: Development of a new finite difference method on advection-diffusion problem, Proceedings of 24th Congress of International Association for Hydraulic Research, Madrid, Spain, pp.C-261-C-267, 1991.
51. 大野豊, 磯田和男: 数値計算ハンドブック, オーム社, 1990.

52. Orlob, G.T.: Eddy diffusion in homogeneous turbulence, *Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol.85, No.HY9, pp.75-101, 1959.
53. Ozmidov, R.V.: On the calculation of the horizontal turbulent diffusion of the pollutant patches in the sea, *Doklady Akad. Nauk, SSSR*, 120, 1958.
54. Roache, P.J.: *Difference Methods for Initial Value Problems*, Hermosa, Albuquerque, NM, 1972.
55. Roache, P.J.: *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, 1976.
56. 杉本隆成, 樋口明生: 瀬戸内海における潮汐混合の実験的研究(11), *京大防災研年報*, 第15号B, pp.431-440, 1972.
57. 玉井信行, 早川典生: 瀬戸内海における潮流と混合に関する研究, 第3回国際海洋開発会議論文集, Vol.4, D-1005, 1975.
58. 玉井信行: 沿岸水域における混合現象, 第12回水工学シリーズ, Bコース, 土木学会水理委員会, B-4-1-B-4-16, 1976.
59. 玉井信行: 密度流の水理, 技報堂出版, pp.13-68, 1980.
60. Taylor, G.I.: Diffusion by continuous movements, *Proceedings of Lond. Math. Soc. (2)*, Vol.20, pp.196-212, 1921.
61. Taylor, G.I.: The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol.A223, pp.446-468, 1954.
62. Toda, K. and F.M. Holly Jr.: Hybrid computation of nonlinear advection-diffusion, *Journal of Hydrosience and Hydraulic Engineering*, Vol.6, No.1, pp.1-11, 1988.

63. 上嶋英機, 橋本英資, 山崎宗広, 早川典生: 瀬戸内海水理模型による水質汚濁拡散実験, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 575-579, 1982.
64. 和田明, 片野尚明: 海域での物質拡散におよぼす流れの影響, 第18回海岸工学講演会論文集, pp. 315-321, 1971.
65. 和田明, 角湯正剛: 瀬戸内海における流況と分散特性, 第21回海岸工学講演会論文集, pp. 297-302, 1974.
66. 和田明, 片野尚明, 角湯正剛, 荒木洋: 沿岸海域における温排水拡散予測手法の適合性に関する研究, 電力中央研究所研究報告73011, 1974.





Inches
Centimetres

KODAK Color Control Patches

© The Tiffen Company, 2000

Kodak
LICENSED PRODUCT

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black

Kodak Gray Scale

C **Y** **M**

© Kodak, 2007 TM. Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19