

## 物理工科のための数学入門：数学の深い理解をめざして

御手洗, 修  
九州大学応用力学研究所QUEST：推進委員

藤本, 邦昭  
東海大学基盤工学部電気電子情報工学科：教授

<https://hdl.handle.net/2324/1500390>

---

出版情報：  
バージョン：  
権利関係：



## 第7章 ベクトル

ベクトルは計算上の便宜的な道具であるという考え方もあるが、ここではまずベクトル本来の物理的な考え方を学ぶ。方向と大きさの2つを持つ量をベクトルとよび、大きさだけを持つ量をスカラーという。そのベクトルはまず速度で考えると考えやすい。ベクトルでは“2つのことが同時に起こる”。動く歩道の速度を $U$ 、歩行者の速度を $V$ とすれば、



図7-1

歩行者の建物に対する速度は $V + U$ となり速く歩けることになるので我々はこれを利用する。逆向きに歩くと速度は $-V + U$ と遅くなるので、逆向きには利用しない。即ち、歩行者は自分の速度 $V$ で歩くと同時に、動く歩道 $U$ でも動いている。ベクトルはこのように前向きなのか、後ろ向きかという“方向”も表している。これらは歩く方向でも異なるので、その歩く方向の角度が重要で、その結果三角関数が必要になってくる。また、速度は大きいのか小さいのかという“大きさ”が重要である。このようにベクトルとは“方向”と“大きさ”を持つ量のことである。

電車に乗っている場合に、相手の電車とすれ違う場合について考える。自分が乗っている電車は止まっていて、窓から見える電車が動く場合、自分が動くように錯覚する場合がある。また、お互いに100km/sしか速度はないのに、すごい速度ですれ違って見える。図7-2に示すように $V_1=100$  km/hの速度の電車に乗っているとすると、自分が止まっているとするために、自分の速度を逆方向に足し合わせてゼロとする。また相手の電車の速度 $V_2=60$  km/hに自分の速度を足し合わせる。こうして、自分の速度は自分の座標を基準にしているので0、相手の速度即ち相対速度は、 $V_1 + V_2=160$  km/hと速くなる。

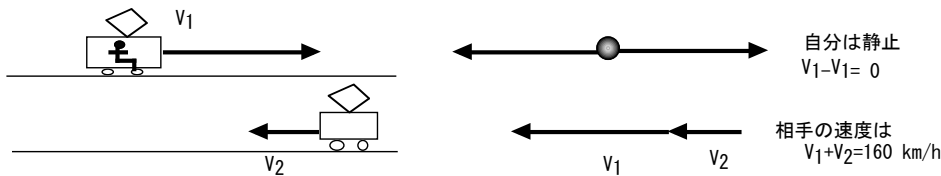


図7-2

ベクトルの表し方は $A, B, C, \dots$ のような肉太文字や、 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ のように上に矢印を付けたり、黒板に書くときは文字の左側を2重にして表す。君たちは決して乱視ではない。

### §7.1. 速度ベクトルの合成

左から右へ速度 $U$ で流れる川を $V$ の速度の船で直角に横切る場合を考える。いろいろな場所での川の流れるは右図に示すように一定であるとする。



図 7- 3

6秒で川を渡るとして、1秒ごとに分けて考えてみる。1秒間に川の水が進む距離はU、船が進む距離はVであるから、船は川に流されると同時に前に進み、結局斜め下流に $\sqrt{V^2 + U^2}$ の速度で進むであろう。それを6回繰り返して向こう岸にたどり着く。

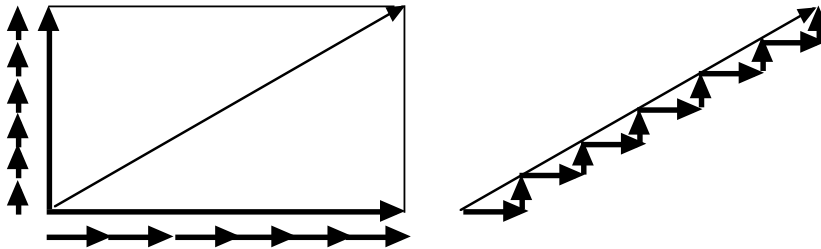


図 7- 4

即ち、少し上に進むと同時に川に流され右側に行く。さらに少し上に進むと同時に川に流され右側に行く。こうして斜めに進むことになる。川に流されるのでその分、速度は速くなる。しかしどの方向に進むかによってその程度は異なる。従って方向が重要なのである。この速度ベクトルの合成を次のよう書く。

$$\mathbf{V}' = \mathbf{U} + \mathbf{V} \tag{7- 1}$$

ベクトルを考える上で大事なことは同時に起こることである。上に進むと同時に右にも進む。その結果斜めに進むのである。決して右に大きく行った後に上に大きく進むのではない。なお、川の水はすべて速度をもっているから、川は速度のベクトル場であるともいう。

**【問題 7- 1】 速度ベクトル：**

左から右へ速度のU=10 km/hの川の流れがある場合、船を下から上にV=5km/hで直角に横切るにはどの方向に、どの程度の速度で走らせればよいか？図もかけ。

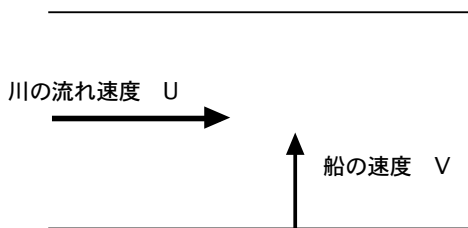


図 7- 5

**§ 7.2. ベクトルの種類**

方向と大きさを持つ量ベクトルにはいろいろなものがある。即ち、磁場、電場、力これらはすべて右に向かうと同時に上に向かうといったベクトル量である。位置ベクトルでは、位置の点は右(x成分)にもあるが、同時に上(y成分)の方にもあると解釈する。

線形数学においては”数ベクトル”という言葉が使われることがあるが、これは数字の集まりにすぎず、

ここで学ぶ物理的ベクトルとは異なる。しかし計算法は同じである。次の章の行列を用いた連立方程式において、この数ベクトルという考え方を説明する。ここではベクトル本来の考え方を学ぶ。

力学においてよく用いられるのは、1個の物体がもっている**位置ベクトル**、**速度ベクトル**、**加速度ベクトル**、**運動量ベクトル**、**角運動量ベクトル**、**回転ベクトル**であり、さらに物体に働く**カベクトル**がある。**電磁気学**においては、次の様なベクトル場、**磁場ベクトル**、**電場ベクトル**、粒子が持つ**電流ベクトル**等がある。

### § 7.3. ベクトル合成の例

**[例 1] 自分の乗った飛行機から見た他の飛行機の進行方向：**

自分が乗っている  $V_1$  で直進している飛行機 1 から、直角方向に交差する飛行機 2 を見ると、斜めに進んでいるように見える。それは、 $V_1$  で進んでいる飛行機 1 からは、飛行機 2 は  $-V_1$  で手前に飛んでくるように見えるからである。即ち、飛行機 2 の速度は  $-V_1$  と  $V_2$  の速度の合成となり、機体が斜めにこちらへ飛んでくるように見える。

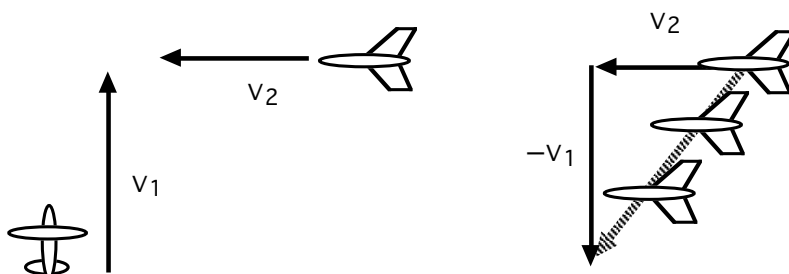


図 7-6

**[例 2] 台風の風速と進行速度**

台風の風は中心に向かって曲がりながら入り込む。一方、進行速度もある。というわけで、地球の北半球では台風の東側は風速が速く、西側では遅い。それを考えてみよう。

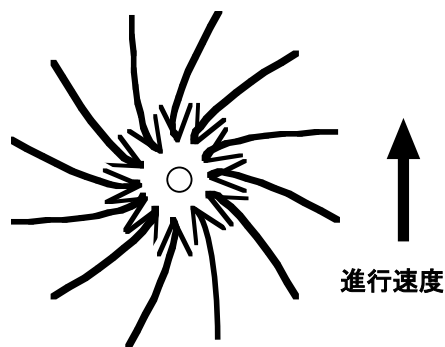


図 7-7

簡単のために台風の中心に向かって直線状に風の吹く場合の合成ベクトルを求めてみると、東と西では同じ速度で、南北で異なるだけである。しかし、中心からずれて中心に吹きこむ場合は明らかに東側の合成速度が大きくなっていることが分かる。

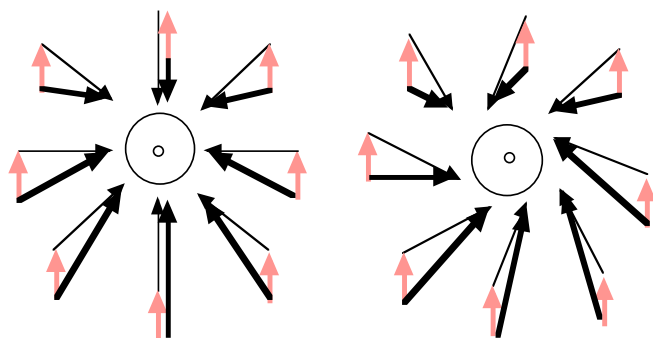


図 7-8

日本の台風情報では、風速は m/s，台風の移動速度は km/h である。これではすぐに速度の合成を行い計算するのは難しい。従って、災害を減らすためにも、米国のようにどちらか一方に統一すべきであろうし、あるいは ( ) で但し書きをつけておくと良い。

**[例 3] 力の釣り合い**

次のように重い物体を遠くに投げたい場合、2人で同時に力をかければよい。

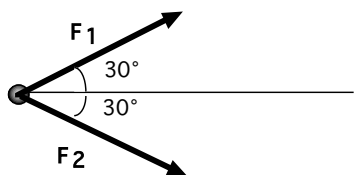


図 7-9

この場合、2人の力の合成は  $F = F_1 \cos\theta + F_2 \cos\theta$  となる。

この物体が飛んでいかないようにするには、逆方向に合成した力と同じ力をかければよい(図 7- 10)。即ち、力が釣り合っている場合、力のベクトルを合成すると、次のように閉じた三角形になり、ベクトルの最後は出発点に必ず戻ってくる(図 7- 10)。このように力の釣り合った場合のベクトルの合成は 0 になり閉じる。図 7- 10 の右図と左図は全く同じである。ベクトルは平行移動しても同じである。

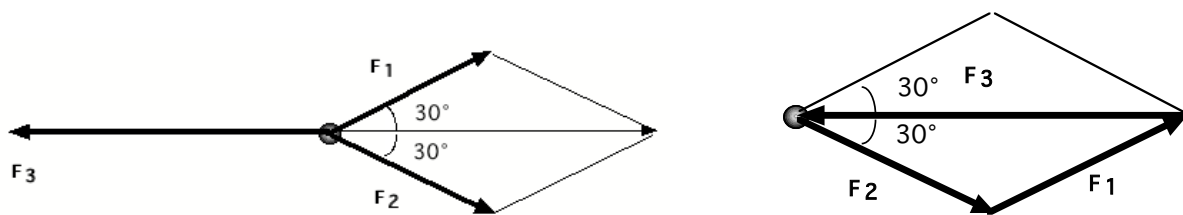


図 7-10

もし合成して力のベクトルが 0 にならなかった場合、合成ベクトルの方向に加速度を持って物体は動くことになる。また、ベクトル  $F$  の負のベクトル  $-F$  は反対方向であることを示す。

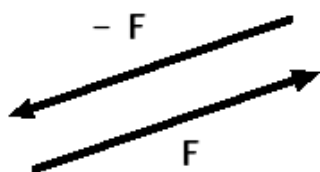


図 7-11

ベクトルは平行移動しても同じ

**[問題 7- 2] カベクトル :**

ある物体に図のように同時に力がかかっているとき合成力をベクトルで示せ.

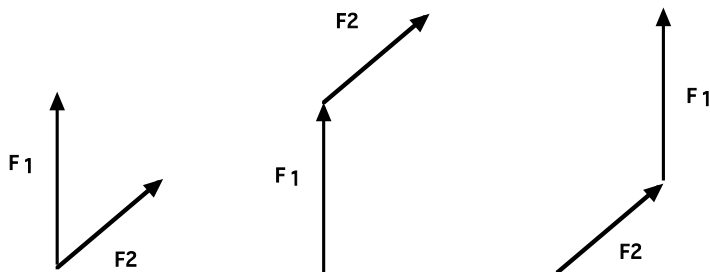


図 7- 12

**[問題 7- 3] 電場ベクトル, 磁場ベクトル, :**

次の合成電場, 合成磁場ベクトルをかけ.

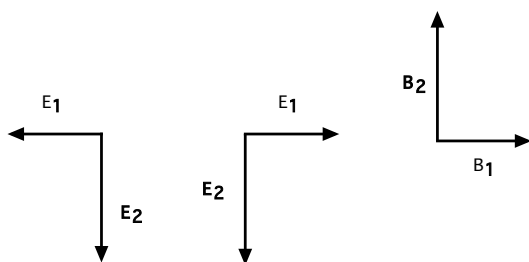


図 7- 13

**[問題 7- 4] 磁場ベクトル :**

回転磁場と軸方向の磁場の合成磁場ベクトルをかけ.

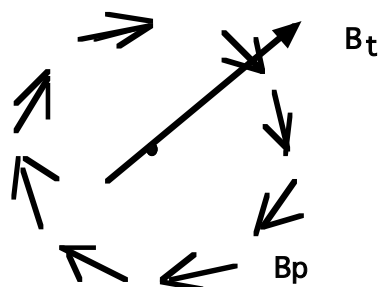


図 7- 14

**[問題 7- 5] 一般のベクトル :**

次のベクトルを合成せよ

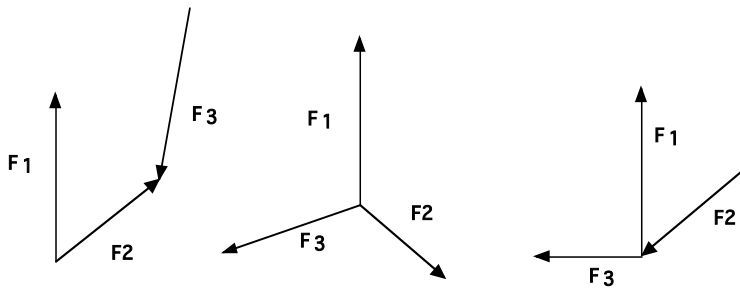


図 7-15

**ベクトルの合成は同時性が大事。  
右に行くと同時に上にいく。**

§ 7.4. 速度ベクトルの重要な応用

§ 7.4.1. 位置ベクトル

位置ベクトルは単に物体の位置を表すだけである。位置ベクトルが大きいということは遠くにあるということである。従って、他のベクトルがその点でのある量の大きさを表すのと少しニュアンスが異なる。しかし、位置ベクトルも“同時”という考えでよく理解できる。即ち、ベクトル  $r$  は  $x$  軸方向に  $X$ 、 $y$  軸方向に  $Y$  だけ“同時”に行ったところにある。これを  $r(X, Y)$  と書き、 $x$  成分、 $y$  成分という。

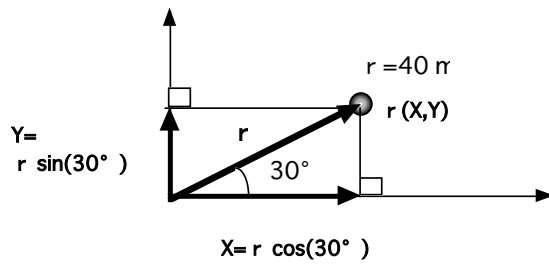
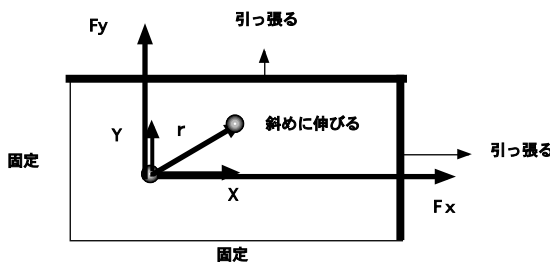


図 7-16

位置ベクトルの合成というのはいかに考えにくい。しかし、ゴム板などの材料に力がかかってある点の変位する場合の**変位ベクトル**と考えると考えやすくなる。図のように、ゴム板を  $x$ 、 $y$  方向にゆっくり引っ張ると、最初に原点にあった点が斜め方向に移動することがわかる。このように確かに変位ベクトルが存在し、合成されていることが理解できる。



ゴム板を  $x$ 、 $y$  方向に引っ張る

図 7-17

次のような例はどうであろうか？東に 10 m 行って、北に 5 m 行く場合には 2 通りある。第一に、東に 10 m 行って、その後北に 5 m 行く場合。第二は、東に 10 m 行くと同時に北に 5 m 行く場合である。

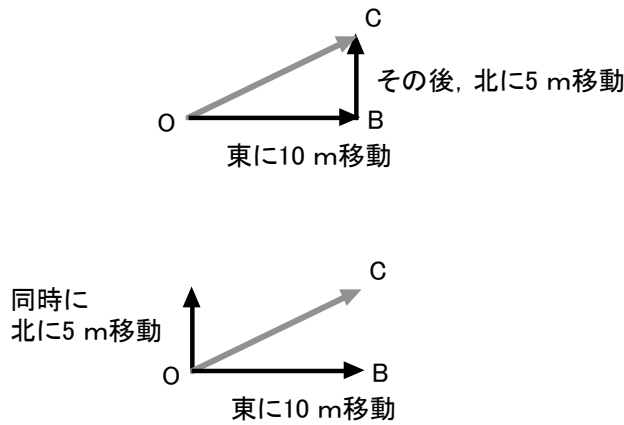


図 7- 18

第一の場合は  $O \rightarrow B \rightarrow C$  と移動している．ベクトルは**同時ではなく時間がずれている**．しかし、 $O \rightarrow C$  と直接移動した場合と同じ地点に到達する．このように移動距離も経路も異なるが、それには無関係に最終的に到達した地点は同じであるから、位置ベクトルの合成はできることになる．第二の場合は  $O \rightarrow C$  と直接移動していて、**同時に東と北に移動**して、経路は一つである．このように位置ベクトルでは**同時でない場合も存在する**るので、後にも述べるようにベクトルの解釈には注意が必要である．

§ 7. 4. 2. 位置ベクトル、変位ベクトルと速度ベクトル

速度とは単位時間（1 秒，1 分，1 時間）に移動する距離のことである．従って、最初の位置ベクトル  $\mathbf{r}_1$  にあった物体がある時間 ( $\Delta t$ ) 内に位置ベクトル  $\mathbf{r}_2$  の位置に  $\Delta \mathbf{r}$  だけ移動した場合、変位ベクトルは  $\Delta \mathbf{r}$  で、速度は  $(\Delta \mathbf{r} / \Delta t)$  となる．

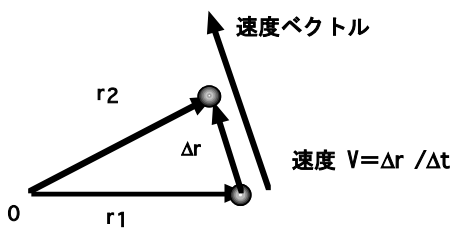


図 7- 19

即ち、速度ベクトルは位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を用いて、

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

と書ける．このとき速度ベクトルは変位ベクトル  $\Delta \mathbf{r}$  の方向と同じである．このようにベクトルを時間で微分すると速度ベクトルとなる．（注：  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  等は第 10 章の微分，無限小解析法で詳しく学ぶ．）

東に向かって走る場合の位置ベクトルと変位ベクトル，速度ベクトルは次図のようになる．

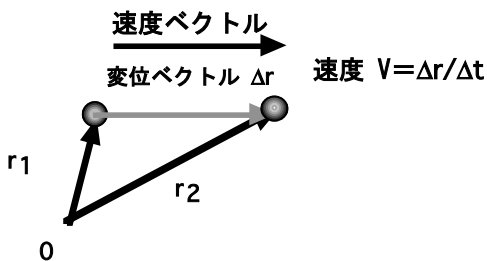


図 7- 20

【衝突コース】アドバーストコース

速度ベクトルに移動にかかった時間をかけるとどれだけ移動したかを示す**変位ベクトル**になる。これを用いると船同士の衝突を予測することができる。

下図のように自分の乗った客船が $V_1$ の一定速度で北上して、魚船が東から西に $V_2$ の一定速度で進む場合、魚船が常に右上（北東の方向）の同じ場所に見えるばあい、この2隻の船は必ず衝突する。これを衝突コースにあるという。この衝突コースはベクトル図で理解できる。

2隻の船が速度を変えずに進む場合、 $t$ 時間に進む距離は客船は $V_1t$ 、魚船は $V_2t$ であり、お互いに見える方向が常に同じなので、必ず衝突する。右のように、2隻の船の進む方向が異なっても必ず衝突する。即ち、衝突地点を頂点とする相似三角形になっていることがわかる。

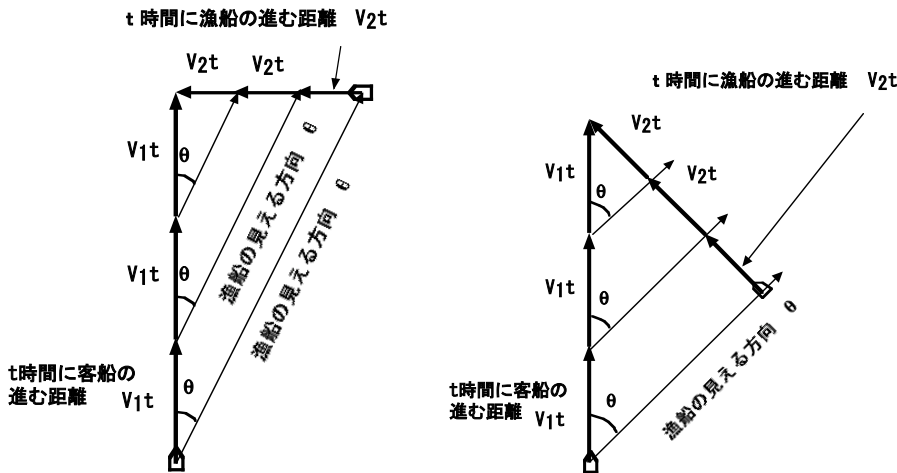


図 7-21

しかしながら、下図左に示すように、魚船が途中で加速して速度をあげて $V_3$ で動くと、衝突地点を行きすぎるので衝突しない。このとき客船から魚船の見える方向は変わっていく。また、下図右に示すように、2隻の船の速度が一定でも、船の最初の位置が元々衝突しない位置にあり、ずれている場合は、もちろん衝突しない。この場合も時々刻々と客船から魚船の見える方向は変わる。

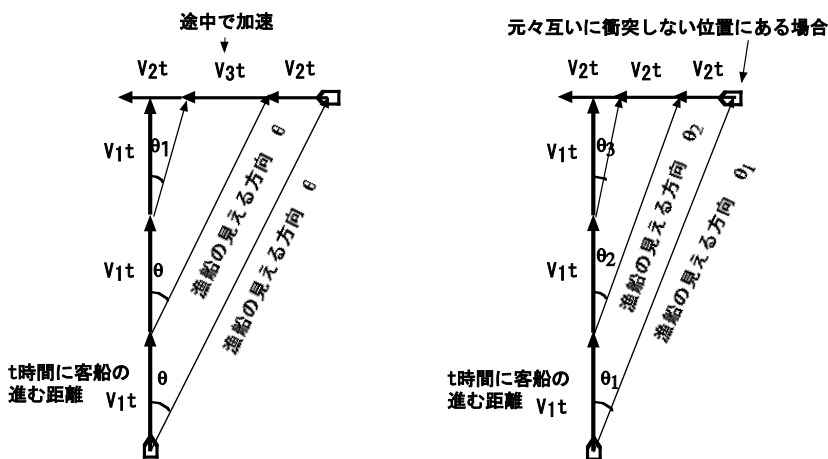


図 7-22

この衝突コースの原理は非常に簡単であり、船同士の衝突を避けるために知っておかねばならない考え方である。衝突コースは船だけではなく、見晴らしのよい田んぼで交差する道路を走る2台の自動車でも起こる。即ち、同じ方向に常に相手の車が見え続けていると必ず衝突する。以上は同じ平面内で運動するときのみ起きるものである。2機の飛行機が衝突コースにあるように見えても、もし同じ平面内になく、上下にずれて移動していれば、一方から見た他方の飛行機の位置は次第にずれていき、衝突しない。もし同じ平面

内を飛んでいけば、衝突する。

### § 7.5. ベクトルの成分と単位ベクトル

ベクトルは大きさと方向を持つことを述べた。図 7-23 のようにこのベクトルは  $x-y$  座標の  $x$  成分座標,  $y$  成分座標で表すこともできる。このように, ベクトルを  $x$  方向,  $y$  方向の成分に分解すると計算しやすいことが多い。ベクトル  $\mathbf{A}$  の  $x$  方向成分を  $A_x$ ,  $y$  方向成分を  $A_y$  とし, ベクトル  $\mathbf{A}$  の長さを  $A$  とすると,

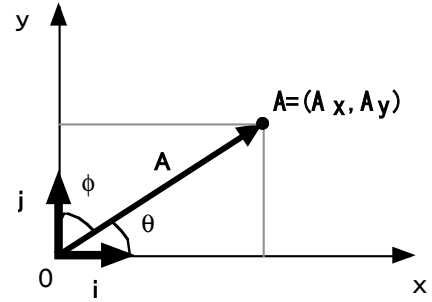


図 7-23

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y) = A \left( \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}, \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \right) \quad (7-2)$$

$$= (A \cos \theta, A \sin \theta)$$

となるが,

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

なので,

$$\mathbf{A} = (A \cos \theta, A \sin \theta) \quad (7-3)$$

で表すことができる。ここで  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$  である。このようにベクトルにおいても三角関数は重要である。また, 図 7-22 のように, ベクトル  $\mathbf{A}$  は,  $x$  方向,  $y$  方向の長さが 1 の単位ベクトル  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  で表し,

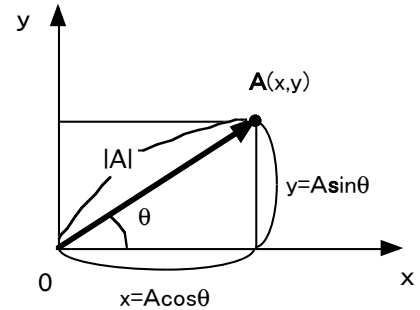


図 7-24

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$$

とも書ける。この表現法はベクトルのいろいろな演算の時に役に立つ。また, 複素数をすでに学んだが点  $A$  は

$$z_A = A_x + A_y i$$

と表すこともできる。ただし  $i$  は虚数である。単位ベクトル  $\mathbf{i}$  と記号が同じなので混乱しないように注意しよう。

**【問題 7-6】** 次のベクトル  $\mathbf{A}$  の  $x$ ,  $y$  成分を求めよ。

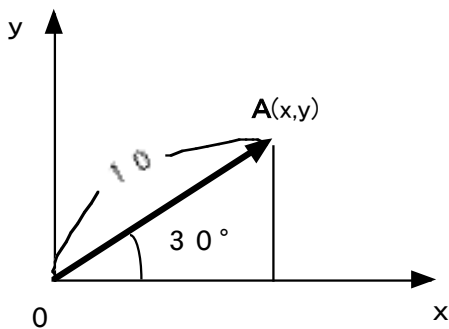


図 7-25

なお、図 7-26 に示すように、3次元のベクトルも表すことができ、次のように書ける。

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

ただし、 $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$  である。また、これを書き直して

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = A \left( \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \right) \quad (7-4)$$

ここで、

$$l = \cos \alpha = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad m = \cos \beta = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \quad n = \cos \gamma = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \quad (7-5)$$

と書くと、 $(l, m, n) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  は 3次元空間でベクトル  $\mathbf{A}$  の長さ  $A$  とその  $x, y, z$  成分のなす角から求まる量で、これを **方向余弦** という。

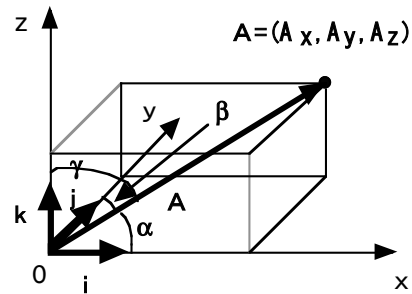


図 7-26

**ベクトルにおいても三角関数は重要**

### § 7.6. ベクトルの演算：

電磁気学、力学、流体力学などでベクトルを用いると定性的で物理的な理解がしやすい。またその演算も理解を助けるものである。しかしながら具体的に問題を解き、計算が必要な場合はベクトルの成分を用いる必要が生じる。

#### § 7.6.1. ベクトル A とベクトル B の内積

ベクトルの合成は同種のベクトル（速度ベクトル同士という意味）の足し算、引き算であった。これに対して違う種類のベクトル  $\mathbf{A}$  とベクトル  $\mathbf{B}$  のかけ算を考えることができる。これは2つのベクトルがどの程度同じ方向を向いているかをあらわすかけ算で、次のように書く。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (7-6)$$

2つのベクトルが直角に交わっていると0になる。同じ方向のときが最大である。即ち、次のように**内積**とは2つのベクトルのなす角がいくらかを表すものである。

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} \tag{7-7}$$

ベクトル  $\mathbf{A}$  とベクトル  $\mathbf{B}$  の内積自体はスカラー（大きさのみの量）であり方向性はない。

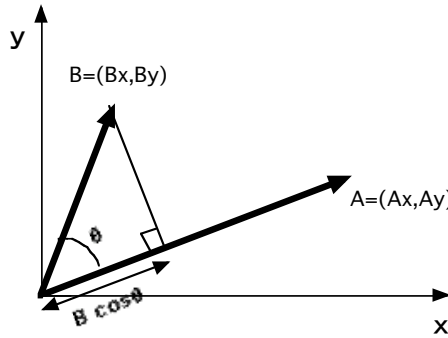


図 7-27

直角のとき： $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$   
 同じ方向 ( $\theta=0$ ) のとき： $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB$

**ベクトル内積の成分表示**

ベクトルが座標で与えられているとき、実際の計算に当たっては成分を利用すると便利ことが多い。2

つのベクトルを  $\mathbf{A}=(A_x, A_y)$ ,  $\mathbf{B}=(B_x, B_y)$  とすると,  $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}$  と書けるので,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) = A_xB_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_yB_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_xB_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_yB_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} \\ &= A_xB_x + A_yB_y \end{aligned} \tag{7-8}$$

ここで  $\mathbf{i}$  と  $\mathbf{j}$  は直交しているので,  $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$ ,  $\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ ,  $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0$  である。

また,  $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$  から

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} = \frac{A_x}{A} \frac{B_x}{B} + \frac{A_y}{A} \frac{B_y}{B} \tag{7-9}$$

といろいろと表現できる。ベクトルの成分がわかればその間のなす角度が計算できる。

さらに, 3次元の2つのベクトルを  $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$  とするときの内積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= (\underline{A_xB_x\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}} + \underline{A_yB_y\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}} + \underline{A_zB_z\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}) + (A_xB_y\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_yB_x\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + (A_xB_z\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_zB_x\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + (A_yB_z\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} + A_zB_y\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \tag{7-10}$$

2つのベクトルの交差角度の式は

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} = \frac{A_x}{A} \frac{B_x}{B} + \frac{A_y}{A} \frac{B_y}{B} + \frac{A_z}{A} \frac{B_z}{B} \quad (7-11)$$

となり、方向余弦によっても計算ができる。

**【問題 7- 7】** 点Pが座標 (2, 0, 2) , 点Qが座標 (0, 2, 2) にあるとき、原点0からの2つの直線PO, QOのなす角度を、ベクトルの内積を用いて計算せよ。

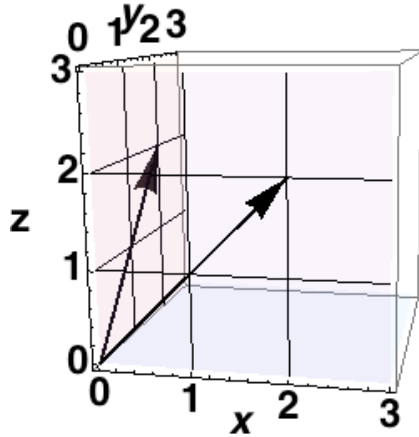


図 7- 28

**【例 4】 平面への太陽光の入射**

太陽電池パネルは太陽光線に直角方向におかれた方が一番よく発電できることはすぐわかる。直角方向からずれた場合は内積によって計算できる。単位面積あたりに入射する太陽光線の熱流束密度  $\mathbf{Q}$  [W/m<sup>2</sup>] は大きさと方向性を持つのでベクトルで表し、面積  $\mathbf{S}$  の入射平面 (AB) の方向は平面に直角方向のベクトル ( $\mathbf{S}$ ) で表すと、

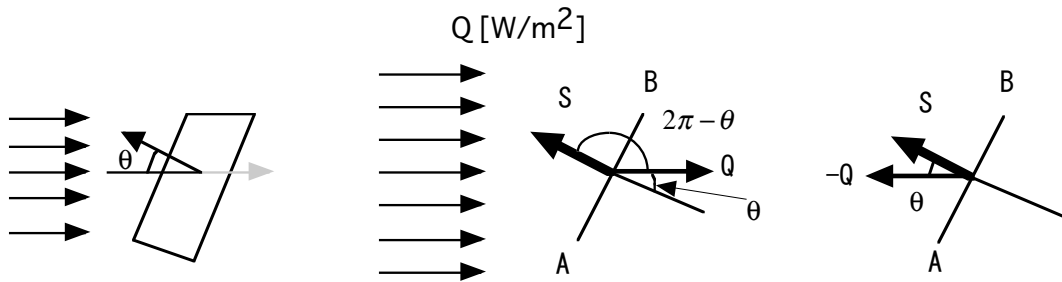


図 7- 29

平面が  $\theta$  だけ傾いた場合の全体の入射熱流束は

$$\Gamma = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{S} = QS \cos(2\pi - \theta) = (-Q)S \cos\theta \quad (7-12)$$

で表される。従って、太陽光線と入射平面が平行になっている場合、 $\mathbf{Q}$  と  $\mathbf{S}$  が直角なので内積は0、入射熱流束はない ( $\Gamma = 0$ )。平面が太陽光に直角に置かれている場合  $\cos\theta = 1$  となり、入射熱流束は最大になることがわかる。

これと同じ考え方は流体力学の流束や電磁気学での磁束などの計算でも用いられる。また立方体の各面は面積ベクトルを持ち、次図のように右ネジの方向にベクトルの方向をとる。また通常内部から外向きにベクトルの方向をとる。

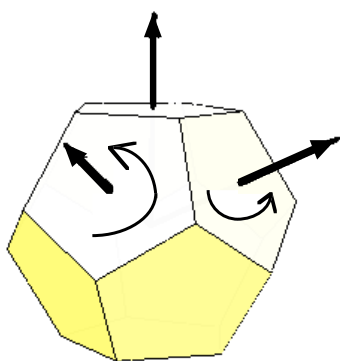


図 7-30

**[例 5] : エネルギー (力の向き  $F$  と移動方向  $r$ )**

図 7-31 に示す様に, 物体に力  $F$  をかけたとき物体は必ずしも力の方向に動くとは限らない. 物体が  $\theta$  だけ異なる  $x$  方向に  $r$  だけ移動する場合, 物体にかけた力は  $x$  方向に  $F \cos \theta$  で, 物体に与えたエネルギーは

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = Fr \cos \theta$$

で表される.  $y$  方向の力は  $F \sin \theta$  となるがその方向には動かないので物体に与えるエネルギーは 0 である.

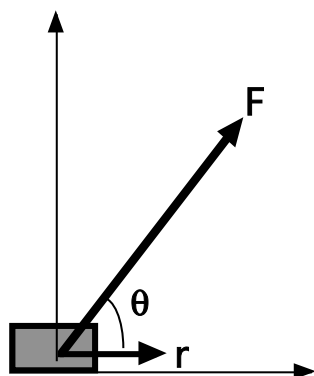


図 7-31

**[例 6] : 負荷で消費される電力 (電圧の向き  $V$  と電流の方向  $I$ )**

電圧が正負交互に振れる交流回路において, 負荷が時間遅れを伴うインダクタンス成分を持つ場合, 電圧をかけてもすぐに電流は流れ出さず, 遅れて流れ出す. そのときの遅れを位相角  $\varphi$  で表すと, 負荷で消費される電力は

$$W = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = VI \cos \varphi$$

で表される. これも内積を理解するためのよい例である.

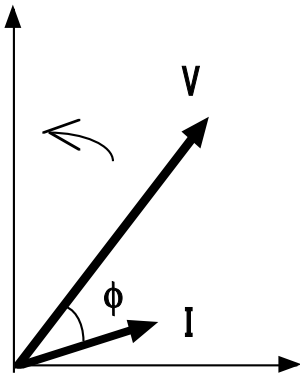


図 7- 32

§ 7. 6. 2. ベクトル A とベクトル B の外積

内積が同じ方向を基準にしたかけ算であるのに対して、外積は直角方向を基準にしたかけ算で” × ” で表す。図 7- 3 0 に示すように、ベクトル A とベクトル B の外積は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \tag{7- 13}$$

このように、ベクトル A と B の外積の大きさは平行四辺形の面積に等しく、2つのベクトルが直角に交わっているとき(長方形の場合)に最大で、2つのベクトルが同じ方向のとき平行四辺形の面積は 0 になるので 0 になる。

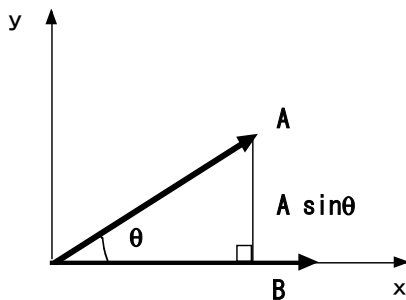


図 7- 33

図 7- 33 に示すように、ベクトル A とベクトル B の外積はまたベクトルであり大きさと方向性がある。それはベクトル A からベクトル B に回転したとき、右ネジ(ネジ頭の上で右側に回したときに、前に進むネジ)の進む方向がベクトルの外積の方向である。従ってベクトル A からベクトル B の外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  は、ベクトル B からベクトル A の外積  $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  の逆方向で  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$  である。

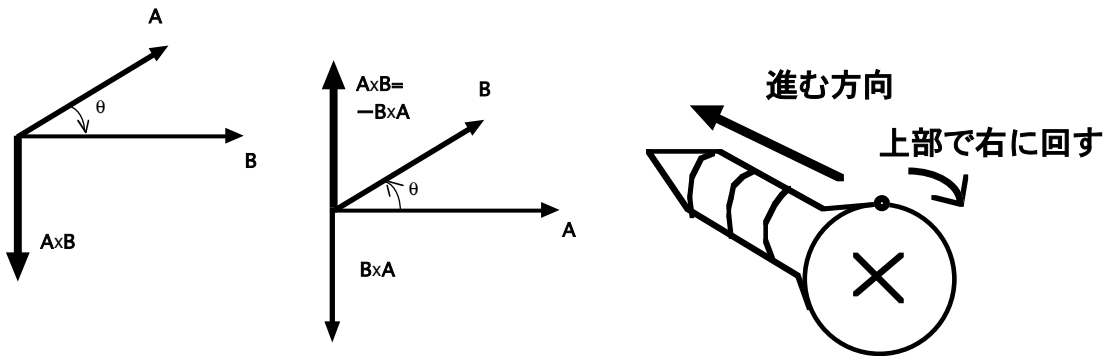
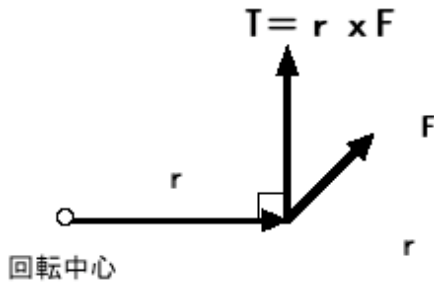


図 7- 34

**[例 7] : 回転物体にかかるトルク :**

回転中心から位置ベクトル  $\mathbf{r}$  だけ離れた点にかかる力を  $\mathbf{F}$  とすると、トルクは  $\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  となる。このトルクベクトルは力がかかっている場所が重要なので、平行移動はできないことに注意しよう、



斜めから見た図

図 7 - 35

**[例 8] 角速度ベクトル（回転ベクトル）と回転速度**

軸の周りに剛体が一定の角速度  $\omega$  で回転している場合、右ネジの進む方向のベクトルで表し、これを角速度ベクトル  $\omega$  という。また、ある点  $O$  から  $r$  だけ離れた点にある物体が立体的に角速度  $\omega$  で回転している場合、回転速度は  $\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$  で表される。

これは **2.3.4. 回転運動の速度と半径の関係** で説明したように、角速度  $\omega$  で回転している場合の半径  $r$  の円板の端の回転速度

$$V = r\omega$$

より与えられる。

即ち、右図のように位置ベクトルが角度  $\theta$  だけ傾いて回転している場合、回転速度は

$$V = \omega r \sin \theta$$

これをベクトルで書けば、

$$\mathbf{V} = \omega \times \mathbf{r}$$

となる。

$x$  軸方向に回転する角速度ベクトル  $\omega_x$  の回転速度と (図 7-37 左),  $z$  軸方向に回転する角速度ベクトル  $\omega_z$  の回転速度を 3D で表す (図 7-37 右) と、回転角速度が同じ場合、

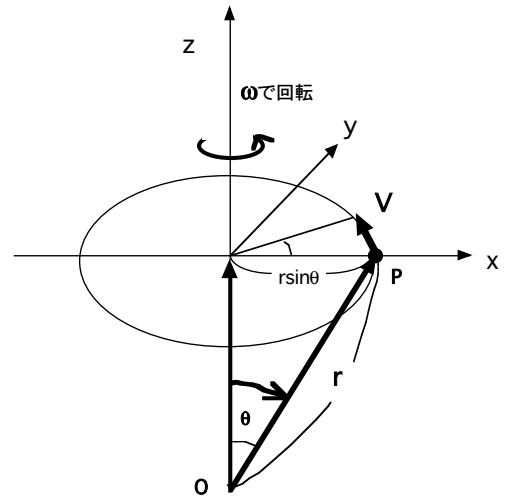


図 7 - 36

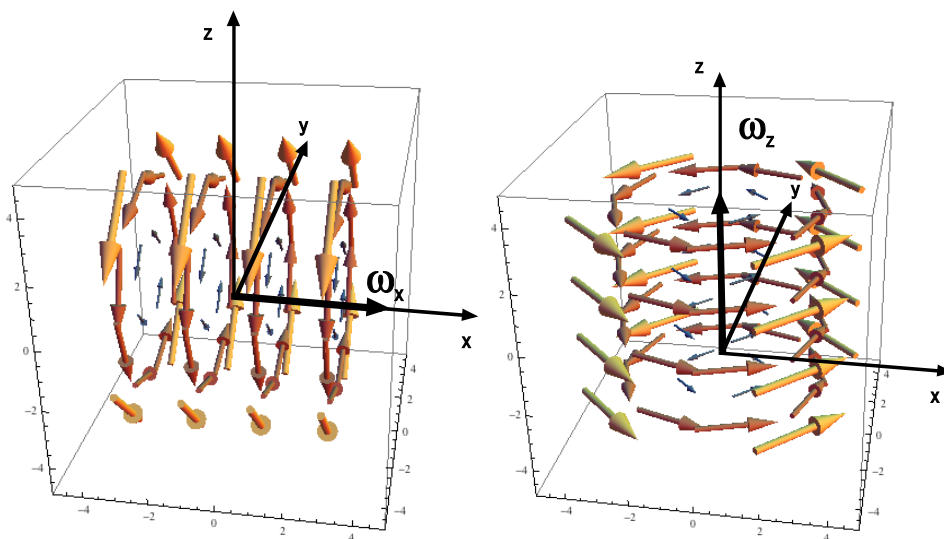


図 7- 37

これを合成すると、 $z = x$  で表される 45 度傾いた直線を中心として回転する角速度ベクトルになることがわかる。

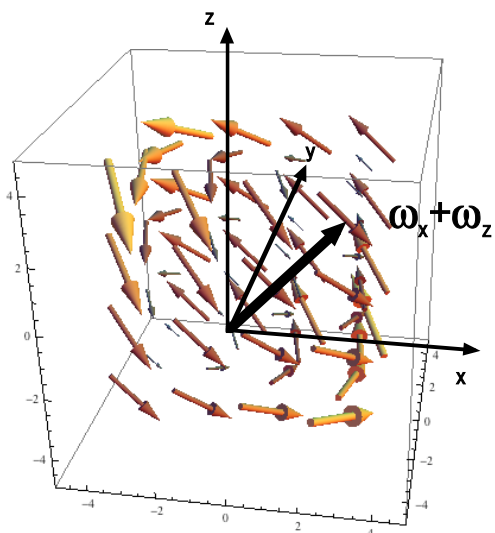


図 7- 38

**[例 9] 角速度ベクトル（回転ベクトル）と回転加速度**

角速度  $\omega$  で回転している場合, 1 周期の間に半径  $r$  の円板の端の速度ベクトル  $\mathbf{V}(=\omega \times \mathbf{r})$  自身も一回転する. すべての回転速度ベクトルの始点を集めて原点にとって描くと,

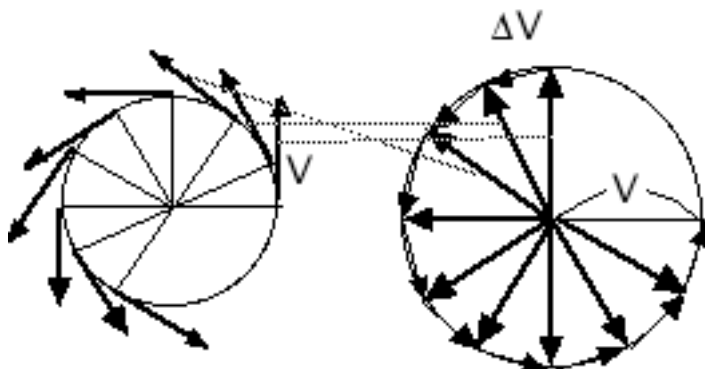


図 7-39

1 周期  $T$  の間に速度ベクトルは  $2\pi V$  だけ変化するので, 1 周期  $T$  の間に速度が変化する割合である加速度は

$$\alpha = \frac{2\pi V}{T} = \omega V$$

となる.

速度ベクトル  $V$  が角速度ベクトル  $\omega$  と直角方向の場合にはこうなるが, 傾いているような一般的な場合は  $\alpha = \omega V \sin\phi$  となり, これをベクトルで書けば

$$\alpha = \omega \times V$$

と外積でかける. このとき加速度の方向は回転中心の方向である.

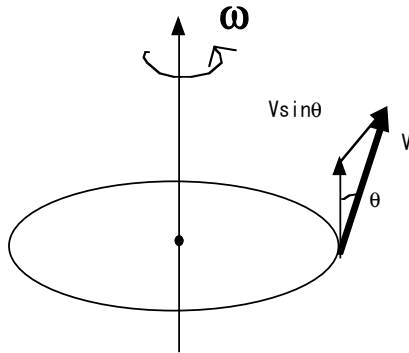


図 7-40

**[例 10] : 電磁気学におけるローレンツ力:**

磁場 (磁束密度)  $B$  内を速度  $V$  で動く正の電荷  $q$  を持つ荷電粒子にかかる力  $F$  は次の式で与えられる.

$$F = qV \times B$$

このローレンツ力によって荷電粒子は磁力線の周りを回転する.

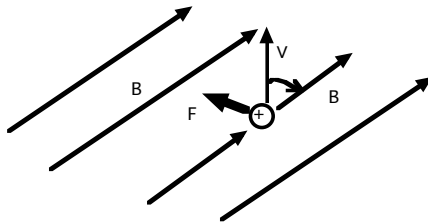


図 7-41

これを次のように書き直し, 力は質量  $\times$  加速度  $F = m\alpha$  で表せるので, 上でやった回転の加速度  $\alpha$  を用いて

$$F = (-qB) \times V = m(\omega \times V)$$

これから磁力線を回転する角振動数を求めることができる.

$$\omega = \frac{-qB}{m}$$

電荷が正か負によって回転方向が異なることがわかる. これをラーマ-角振動数とよび, 磁力線の中の荷電粒子の運動を考える際に重要となる.

以上のように外積は回転現象を表すために用いられているといえる.

ベクトルの外積は平行四辺形の面積を表し、回転現象を表す時に用いる。  

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta$$

ベクトルの始点がどこにあってもよい場合を**自由ベクトル**，始点が限られている場合を**束縛ベクトル**という。**トルクベクトル**や**回転速度ベクトル**は始点を移動すると意味をなさないので束縛ベクトルである。また、**極性ベクトル**は向きが自由に決まるベクトルで、変位、力、速度、加速度、位置ベクトル、**軸性ベクトル**は条件によって向きが決まっていて、トルク、角速度、面積ベクトルがそれに当たる。いつも平行移動ができるとは限らないので注意が必要である。

§ 7. 6. 3. 外積ベクトルの成分表示

ベクトルが座標で与えられているとき、実際の計算に当たっては成分を利用すると便利ことが多い。

**2次元空間の平面の面積：** 平面内におかれた2つのベクトルを  $\mathbf{A}=(A_x, A_y)$ ， $\mathbf{B}=(B_x, B_y)$  とすると、

$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ ， $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$  と書けるので、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}) = A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_y B_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_y B_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned} \tag{7- 14}$$

なお、 $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$ ， $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$ ， $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$  を用いた。従って、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  の z 成分は

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_z = (A_x B_y - A_y B_x)$$

この結果を見ると (x, y, z) の順番が大事で、z 成分を求める場合は (x 成分 y 成分 - y 成分 x 成分) と循環している性質を利用すればよいことがわかる。

実際、 $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_z$  は次の図でわかるように平行四辺形の面積と一致する。

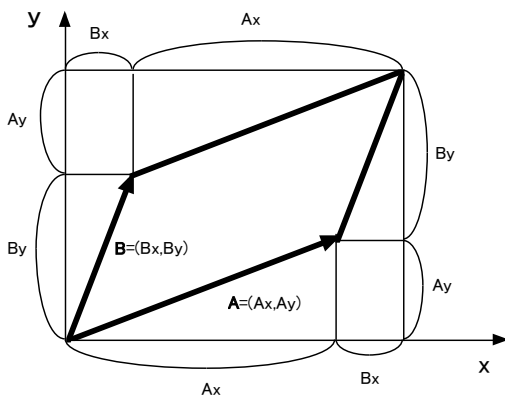


図 7- 42

即ち、平行四辺形の面積は、全体の長方形の面積から周りの4つの三角形と2つの長方形の面積の合計を差し引いて

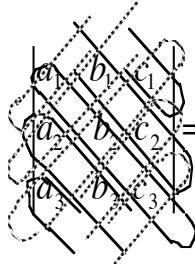
$$S = (A_x + B_x)(A_y + B_y) - (A_x A_y + B_x B_y + 2A_y B_x) = A_x B_y - A_y B_x$$

となる。

ここで、2行2列の行列式は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3行3列の行列式は、右下の方向に掛けてそれを足し合わせ、右上の方向に掛けたものを差し引いて得られる。



$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

これを用いると、面積は次のように書ける。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & \mathbf{i} \\ A_y & B_y & \mathbf{j} \\ 0 & 0 & \mathbf{k} \end{vmatrix} \tag{7-15}$$

**【例題 1】** 点 P ベクトルが  $\mathbf{p} = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$  , 点 Q ベクトルが  $\mathbf{q} = (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$  のとき、外積を求めよ。

**【解答】**  $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 12\mathbf{i} \times \mathbf{i} + 6\mathbf{j} \times \mathbf{i} + 20\mathbf{i} \times \mathbf{j} + 10\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 14\mathbf{k}$

**【例題 2】** 点 P が座標 (2, 1) , 点 Q が座標 (1, 3) にあるとき、原点 0 からの 2 つの直線 PO, QO の作る平行四辺形の面積を外積を用いて求めよ。

**【解答】**  $A_x = 2, A_y = 1, B_x = 1, B_y = 3$  なので、

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = (A_x B_y - A_y B_x) = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5 \quad \text{---} > 2.5$$

さらに、3次元空間でのベクトル  $\mathbf{A}$  とベクトル  $\mathbf{B}$  のなす平行四辺形の面積は

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = \underline{A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i}} + \underline{A_y B_x \mathbf{j} \times \mathbf{i}} + \underline{A_z B_x \mathbf{k} \times \mathbf{i}} \\ &\quad + \underline{A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j}} + \underline{A_y B_y \mathbf{j} \times \mathbf{j}} + \underline{A_z B_y \mathbf{k} \times \mathbf{j}} \\ &\quad + \underline{A_x B_z \mathbf{i} \times \mathbf{k}} + \underline{A_y B_z \mathbf{j} \times \mathbf{k}} + \underline{A_z B_z \mathbf{k} \times \mathbf{k}} \tag{7-16} \\ &= (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i} \times \mathbf{j} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{k} \times \mathbf{i} + (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  ベクトルの x 成分は y z, z y, y 成分は z x, x z, z 成分は x y, y x と循環していることに注意しよう。

これを行列式を用いると

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} A_y & B_y \\ A_z & B_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_z & B_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & \mathbf{i} \\ A_y & B_y & \mathbf{j} \\ A_z & B_z & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

となる．平行四辺形の面積は

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2} \quad (7-17)$$

【問題 7-8】 点 P が座標 (2, 0, 2) , 点 Q が座標 (0, 2, 2) にあるとき, 原点 0 からの 2 つの直線 PO, QO の作る平行四辺形の面積を求めよ. またこの平面に垂直なベクトルを求めよ.

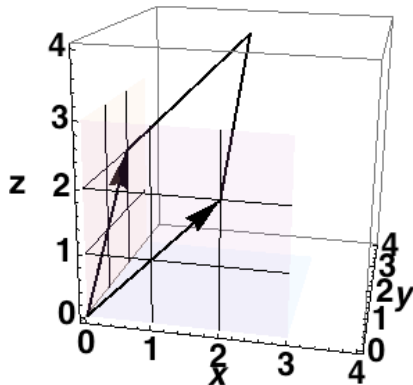


図 7-43

内積, 外積のまとめ:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

§ 7.6.4. ベクトル A, B, C のスカラー三重積

2つのベクトル A と B の外積で面積を求めたが, このベクトル A x B にベクトル C を高さとして内積すると, V = (A x B) · C によって体積を求めることができる. この体積 V はスカラーなので, ベクトルのスカラー三重積という.

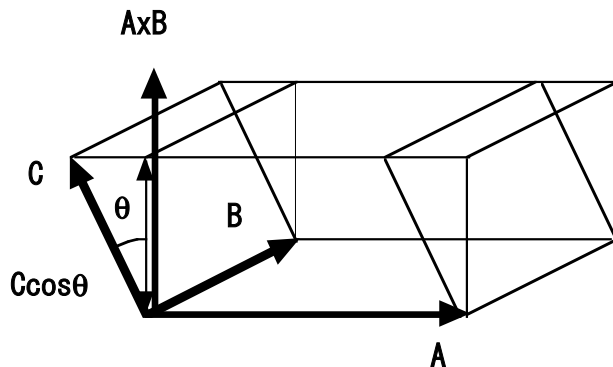


図 7-44

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$$

とおくと、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} V &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \\ &= \left\{ (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \right\} \cdot (C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) C_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) C_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) C_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) C_x + (A_z B_x - A_x B_z) C_y + (A_x B_y - A_y B_x) C_z \end{aligned} \tag{7-18}$$

なお、ベクトルを縦方向に書けば、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$$

外積を行列式と行列で表すこともできるし、さらに3行3列の行列式でもかける。

$$V = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & \mathbf{i} \\ A_y & B_y & \mathbf{j} \\ A_z & B_z & \mathbf{k} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} \tag{7-19}$$

この三重積は体積を表し、方向性はもはやないのでベクトルではなく、スカラー量である。つまり、ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の作る底面積  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  に高さ  $C \cos \theta$  をかけるので体積になる。また、この体積は、ベクトル  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{C}$  の作る底面積  $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  に高さ  $A \cos \theta$  をかけても得られるし、ベクトル  $\mathbf{C}$  と  $\mathbf{A}$  の作る底面積  $(\mathbf{C} \times \mathbf{A})$  に高さ  $B \cos \theta$  をかけても得られる。即ち、 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{A}$  の順に

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \tag{7-20}$$

また、内積の順序は入れ替えても同じなので、これはそれぞれ次のように書ける。

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \tag{7-21}$$

**【例11】ファラデーの電磁誘導の法則**

スカラー三重積のよい例に**ファラデーの電磁誘導の法則**がある。図の様に、磁場  $\mathbf{B}$  中においた”コ”の形状をした金属レール上で、金属棒を接触させて速度  $\mathbf{U} = d\mathbf{x} / dt$  で  $x$  方向に動かすと、ローレンツ力  $\mathbf{F} = q\mathbf{U} \times \mathbf{B}$  が金属棒の方向に発生する。金属棒の  $y$  の負の方向に+の電荷が移動し、 $y$  の正の方向に電子が移動する結果、磁力線の周りの金属レールに電場が発生する。

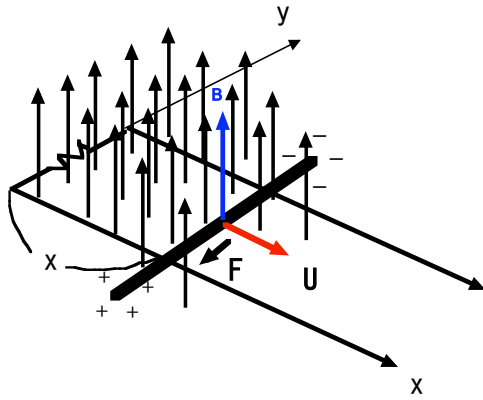


図 7-45

金属棒の  $y$  の負の方向にローレンツ力  $\mathbf{F}$  が働き、電荷は  $ds$  だけ移動するので、 $W = qV = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  のエネルギーを電荷はもらう。ただし、 $V$  は磁力線の周りのレールに沿った電位である。この式にローレンツ力を代入すれば、磁力線の周りの電位（起電力）は

$$V = \int (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = - \int (\mathbf{B} \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{s}$$

となる。ここでベクトル三重積  $\mathbf{B} \times \mathbf{U} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{U} \times d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$  を用いて書き直すと

$$V = - \int \mathbf{U} \times d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = - \int \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times d\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = - \int \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

ここで、 $d\mathbf{x} \times d\mathbf{s} = d\mathbf{A}$  は面積素で、 $\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  は磁束である。このようにして**電磁誘導の法則**を導くことができる。（なお、 $dx$ ,  $ds$ ,  $dx/dt$  は第 10 章の微分のところで詳しく述べる）

**[例題 3]** 点 A が座標  $(2, 0.5, 0)$ ，点 B が座標  $(0.5, 2, 0)$ ，点 C が座標  $(0.2, 0.2, 2.5)$  にあるとき、原点 0 からの 3 つの直線 PO, QO, RO の作る立体の体積を求めよ。

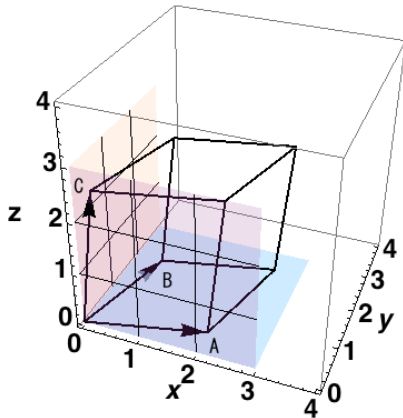


図 7-46

**[解答]**

$$V = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2.5 - 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2.5 = 10 - 0.125 = 9.875$$

**[問題 7-9]** 点 P が座標  $(2m, 0, 2m)$ ，点 Q が座標  $(0, 2m, 2m)$ ，点 R が座標  $(-1m, -1m, 2m)$  にあるとき、原点 0 からの 2 つの直線 PO, QO の作る立体の体積を求めよ。

§ 7.6.5. ベクトル  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  のベクトル三重積

2つのベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の作る平面に垂直なベクトル  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  と、ベクトル  $\mathbf{C}$  を外積して得られるベクトル  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  は図 7-47 に示すように必ず  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の作る平面上のベクトルになる。  $\mathbf{A}(2, 1, 0)$ ,  $\mathbf{B}(0.5, 0.5)$ ,  $\mathbf{C}(-0.5, -0.5, 1)$  とした場合の  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  ベクトルを示す。

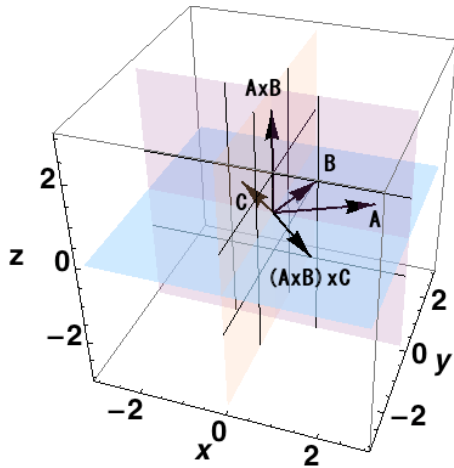


図 7-47  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

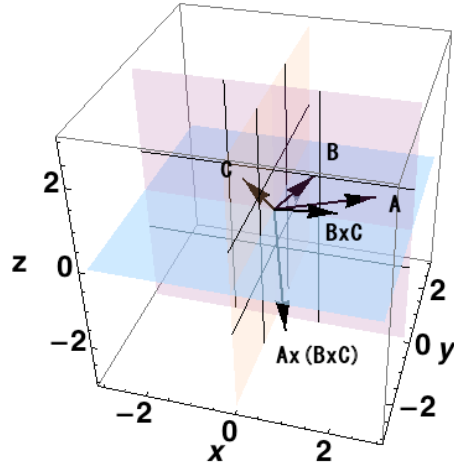


図 7-48  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

従って,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = a\mathbf{A} - b\mathbf{B}$$

とおける。ここで  $a$ ,  $b$  はスカラーである。この演算は  $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}$  のかけ算なので

$$a = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \quad b = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$$

となりそうである。また  $\mathbf{B}$  ベクトルと  $\mathbf{C}$  ベクトルは  $90^\circ$  以上あるので負で  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} < 0$ 。  $\mathbf{C}$  ベクトルと  $\mathbf{A}$  ベクトルも  $90^\circ$  以上あるので負で  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} < 0$  となるが、  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  ベクトルは  $\mathbf{A}$  ベクトルの方向にあり、  $\mathbf{B}$  ベクトルとは逆方向にあるので、結局

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \tag{7-22}$$

となることがわかる。

実際にそうなるかを確かめてみよう。  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  と置くと  $D_x = A_y B_z - A_z B_y$ ,  $D_y = A_z B_x - A_x B_z$

$$\begin{aligned} [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}]_z &= [\mathbf{D} \times \mathbf{C}]_z = D_x C_y - C_x D_y \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) C_y - C_x (A_z B_x - A_x B_z) \\ &= -A_z (B_y C_y + B_x C_x) + B_z (A_y C_y + A_x C_x) \\ &= -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

また、次の式も成り立つことがわかる。

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{7-23}$$

またここで注意しなければならないのは、  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  と  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  は等しくないということである。

これは回転が起きるので、その順序が異なれば最終的なベクトルは異なるということである。

次図に図 7-47 と同じ  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  ベクトルを考えた場合の  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  ベクトルを図 7-48 に示す。このように図 7-47 とは全く異なる方向のベクトルになることがわかる。 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  で、これはあとで学ぶように行列の場合に似ている。

**【例題 4】**  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$  となることを示せ。

**【解答】**  $\mathbf{E} = (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$  とおくと、

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} &= (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} = \{\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} \cdot \mathbf{A} \\ &= \{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}\} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

**【問題 7-10】**  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$  となることを示せ。

スカラー三重積：

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (A_y B_z - A_z B_y)C_x + (A_z B_x - A_x B_z)C_y + (A_x B_y - A_y B_x)C_z$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

ベクトル三重積：

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

## § 7.7. 空間図形

位置ベクトルを用いると 3 次元空間の図形に関する計算が比較的容易に行える。これらは立体的なゲームソフトを作る場合などで大いに役に立つはずである。

直線同士のなす角度，点と平面の距離，円，球などは位置ベクトルを用いると，簡単な式で表すことができ，見通しが得られやすい。

### § 7.7.1. 直線のベクトル表示

**【1】ある点 A を通る  $\mathbf{b}$  ベクトル方向の直線：**

点 A を通る  $\mathbf{b}$  ベクトル方向の直線は，点 A を  $\mathbf{a}$  ベクトルで表すと媒介変数  $t$  の値に応じて

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b} \tag{7-24}$$

で表すことができる。これを成分で書くと

$$\begin{cases} x = a_x + tb_x \\ y = a_y + tb_y \end{cases}$$

となり，下図のようになる。

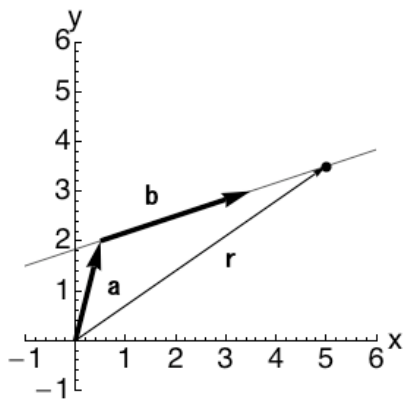


図 7-49

t を消去して、y を x で表すと、

$$y - a_y = \frac{b_y}{b_x}(x - a_x)$$

となり同じ直線になる。

**[2] 2点 A, B を通る直線 :**

点 A と B の 2 点を通る直線の式は、**a**、**b** ベクトルで表すと、**b - a** 方向に伸びていくので媒介変数 t の値に応じて

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{7-25}$$

で表すことができる。これを成分で書くと

$$\begin{cases} x = a_x + t(b_x - a_x) \\ y = a_y + t(b_y - a_y) \end{cases}$$

となり、下図のようになる。

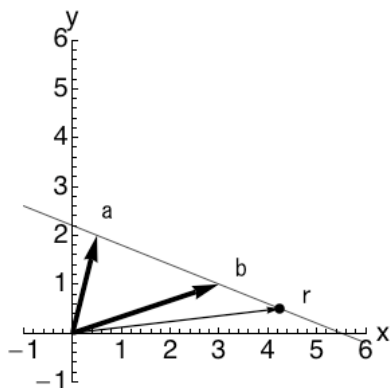


図 7-50

**[3] 原点 O からのベクトル a に直角な直線 :**

原点 O から点 A までのベクトル **a** に直角な直線を求める。ベクトル **a** の端を通る **b** ベクトル方向の直線は  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$  である。 **a** ベクトルは  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = (a_x, a_y)$ 、 **b** ベクトルは点 A から出発するので  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} = \mathbf{r} - \mathbf{a} = (x - a_x, y - a_y)$  となるが、これらは直角なのでその内積は 0 である。従って、**a** ベクトル

ルに直角な直線の方程式は

$$\mathbf{a} \cdot (t\mathbf{b}) = 0 \quad \text{---} \rightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (7-26)$$

を満たさなければいけない。これを成分で書くと、

$$a_x(x - a_x) + a_y(y - a_y) = 0 \quad \text{あるいは} \quad a_x x + a_y y = a_x^2 + a_y^2$$

$\mathbf{a}$  ベクトルに直角な直線の方程式  $y$  を  $x$  で表すと、

$$y = -\frac{a_x}{a_y}(x - a_x) + a_y$$

となり、傾き  $a_y/a_x$  を持つベクトル  $\mathbf{a}$  に直角な直線(傾き:  $-a_x/a_y$ )となる。このように一次関数のところで学んだように、2つの直角な直線の傾きの積は-1になる。

**[4] 3次元空間における直線と垂線:**

点Aを通る $\mathbf{b}$ ベクトル方向の直線は

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

で表すことができる。 $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, 0.5)$  の場合の直線を図7-51に示す。

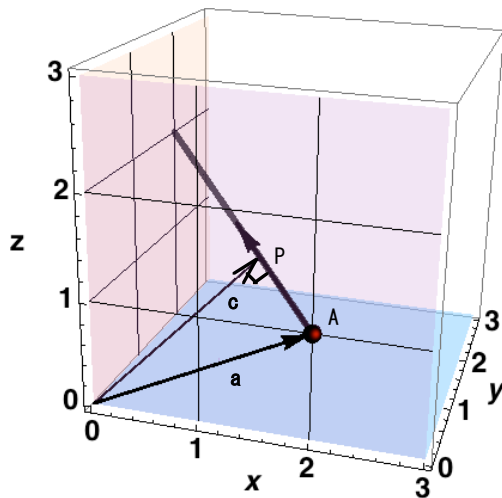


図 7-51

3次元空間における直線から原点までの最短距離は、直線Pから垂線を引いた場合の長さである。これは以下のようにして求めることができる

この $\mathbf{b}$ ベクトル方向の直線から原点に向かって引いた垂線を表すベクトル $\mathbf{c}$ を求めてみよう。ベクトル $\mathbf{c}$ の一端が $\mathbf{b}$ ベクトル方向の直線上にあるので、 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ となり、また、ベクトル $\mathbf{c}$ と $\mathbf{b}$ ベクトルは直角であるから内積は0になり、

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + t\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0$$

これより  $t$  が求まり、 $\mathbf{b}$  ベクトル上のどこにあるかが特定できる。

$$t = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}$$

従って、ベクトル  $\mathbf{c}$  は

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{a} - \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \right) \mathbf{b} \tag{7- 27}$$

となり、垂線のベクトル  $\mathbf{c}$  が求まり、長さを計算することができる。

**[例題 5]** 図 7-51 の  $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, 0.5)$  の場合の、原点からの垂線 OP の長さを求めよ。

**[解答]**  $\mathbf{a} = (2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, 0.5)$  を代入して

$$t = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = -\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = -\frac{-2 + 0.5}{1^2 + 1^2 + 0.5^2} = \frac{1.5}{2.25} = \frac{2}{3}$$

これを  $\mathbf{c}$  に代入して  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$  の各成分を計算すると

$$\begin{cases} c_x = a_x + tb_x = 2 - 2/3 = 4/3 \\ c_y = a_y + tb_y = 2/3 \\ c_z = a_z + tb_z = 1 + (2/3) \cdot 0.5 = 4/3 \end{cases}$$

$$\text{従って、 } L = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{(4/3)^2 + (2/3)^2 + (4/3)^2} = 2$$

**[問題 7- 11]**  $\mathbf{a} = (3, 0, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, 0.5)$  の場合の、原点からの垂線 OP の長さを求めよ。

### § 7. 7. 2. 平面のベクトル表示

**[1]** ある点  $A$  を通り  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  ベクトルに平行な平面：

点  $A$  を  $\mathbf{a}$  ベクトルで表し、 $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  ベクトルに平行な平面上の点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とすれば、この平面は媒介変数  $t_1$  と  $t_2$  の値に応じて

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t_1 \mathbf{b} + t_2 \mathbf{c} \tag{7- 28}$$

で表すことができる。これを成分で書くと

$$\begin{cases} x = a_x + t_1 b_x + t_2 c_x \\ y = a_y + t_1 b_y + t_2 c_y \\ z = a_z + t_1 b_z + t_2 c_z \end{cases}$$

例えば、 $\mathbf{a} = (0, 0, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (5, 0, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (0, 6, 1)$  とすると次図のような平面が得られる。

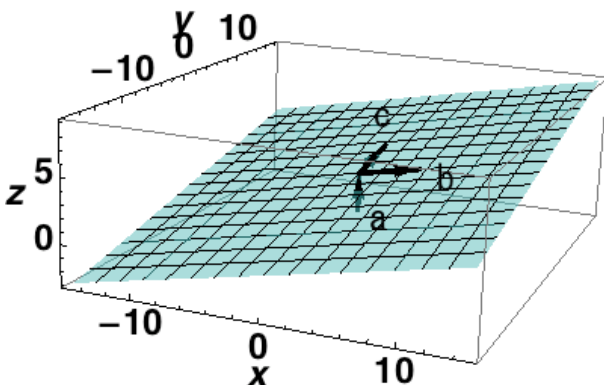


図 7 - 52

$t_1, t_2$  を消去して,  $z$  を  $x$  と  $y$  で表すと

$$t_1 \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \end{pmatrix}$$

これから

$$t_1 = \frac{c_y(x - a_x) - c_x(y - a_y)}{b_x c_y - b_y c_x}, \quad t_2 = \frac{b_x(y - a_y) - b_y(x - a_x)}{b_x c_y - b_y c_x}$$

を得て,  $z = a_z + t_1 b_z + t_2 c_z$  に代入して整理すると

$$z - a_z = \frac{(b_z c_y - b_y c_z)}{b_x c_y - b_y c_x} (x - a_x) + \frac{(b_x c_z - b_z c_x)}{b_x c_y - b_y c_x} (y - a_y)$$

と結構複雑な式になる. 従ってベクトルで表示すると非常に簡単な式になることがわかる.

**[2] 3 点 A, B, C を通る平面 :**

3 点 A, B, C を通る平面の式は媒介変数  $t_1$  と  $t_2$  の値に応じて, また, 上のベクトルにおいて  $\mathbf{b} \rightarrow (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ,  $\mathbf{c} \rightarrow (\mathbf{c} - \mathbf{a})$  と置くと,

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t_1 (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t_2 (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \quad (7-29)$$

で表すことができる. これを成分で書くと

$$\begin{cases} x = a_x + t_1 (b_x - a_x) + t_2 (c_x - a_x) \\ y = a_y + t_1 (b_y - a_y) + t_2 (c_y - a_y) \\ z = a_z + t_1 (b_z - a_z) + t_2 (c_z - a_z) \end{cases}$$

例えば,  $\mathbf{a} = (0, 0, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (5, 0, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (0, 6, 1)$  とすると右図のような平面が得られる.

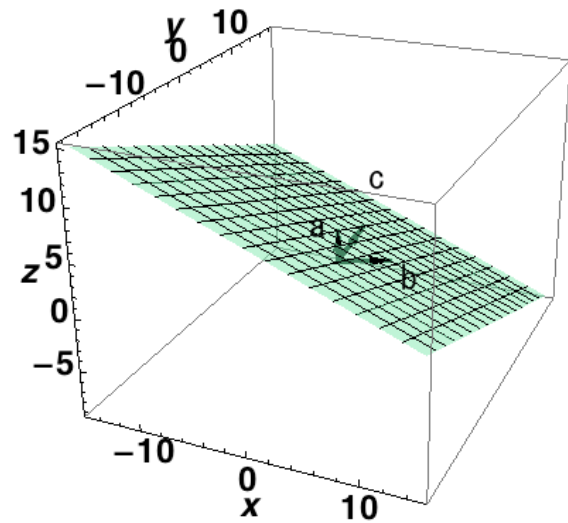


図 7 - 53

**[3] ベクトル a に直角な平面 :**

原点からのベクトル  $\overline{OA} = \mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  に垂直な, 点を通る平面の方程式を求める.  $\overline{AB} = \mathbf{r} - \mathbf{a} = (x - a_x, y - a_y, z - a_z)$  は  $\mathbf{a}$  ベクトルに直角なので, その内積は 0 である. 従って, ベクトル  $\mathbf{a}$  に直角な平面の方程式は

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0 \quad (7-30)$$

で与えられる. これを成分で表し,

$$a_x (x - a_x) + a_y (y - a_y) + a_z (z - a_z) = 0$$

書き直すと,

$$a_x x + a_y y + a_z z = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)$$

原点からのベクトル  $\mathbf{a}$  の長さは  $D = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  である. さらに書き直すと,

$$\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} x + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} y + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} z = D \quad (7-31)$$

§ 7.5. で学んだ方向余弦  $(l, m, n)$  を用いれば平面の式は

$$lx + my + nz = D$$

これは, 平面のベクトルの方程式

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

の両辺を距離  $|\mathbf{a}|$  で割ったものと同じである.

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{a}| \quad (7-32)$$

ベクトル  $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$  に垂直な平面の式 :

$$\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} x + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} y + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} z = D$$

ただし,  $D$  は原点から平面への垂線の距離 ( $D = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ )

一方, この平面  $z$  を  $x$  と  $y$  で表すと,

$$z - a_z = -\frac{a_x}{a_z}(x - a_x) - \frac{a_y}{a_z}(y - a_y)$$

と書き直すこともできる.

**[例題 6]** ベクトル  $(1, 0.5, 2)$  の先端を通り, かつ直角な平面の方程式を求めよ.

**[解答]** :  $D^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1^2 + 0.5^2 + 2^2 = 5.25$

平面の方程式は  $x + 0.5y + 2z = 5.25$

**[4] 平面に垂直な直線 :**

先ほどはベクトルに垂直な平面を求めた. ここでは逆に平面の式が与えられている場合, それに垂直なベクトルとその平面から原点までの距離を計算する.

$$Ax + By + Cz = E$$

書き直して,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z = \frac{E}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

となるが、これは平面のベクトルの方程式  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  の両辺を距離  $|\mathbf{a}|$  で割ったもの

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{a}|$$

と同じなので、原点から平面への最短距離は

$$|\mathbf{a}| = D = \frac{E}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{7-33}$$

また、平面に直角な原点からの  $\mathbf{a}$  ベクトルは、 $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$  は方向余弦であるから

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \left( \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right) = |\mathbf{a}| \left( \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) = \frac{E}{(A^2+B^2+C^2)} (A, B, C) \tag{7-34}$$

**平面から原点への最短距離：**

平面が  $Ax + By + Cz + E = 0$  で表される場合、

平面に直角な原点からの  $\mathbf{a}$  ベクトル：

$$\mathbf{a} = \frac{E}{(A^2+B^2+C^2)} (A, B, C) = |\mathbf{a}| \left( \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right)$$

原点から平面への最短距離：  $|\mathbf{a}| = \frac{E}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

**[例題 7]** 平面の方程式  $x + 0.5y + 2z = 5.25$  平面の場合、原点への垂線の長さを求めよ。また、垂線のベクトルを求めよ。

**[解答]** 図 7-54 に示す。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1^2+0.5^2+2^2}}x + \frac{0.5}{\sqrt{1^2+0.5^2+2^2}}y + \frac{2}{\sqrt{1^2+0.5^2+2^2}}z &= \frac{5.25}{\sqrt{1^2+0.5^2+2^2}} \\ &= \sqrt{5.25} = 2.29 \end{aligned}$$

となるので、垂線の長さは  $|\mathbf{a}| = 2.29$ 、ベクトルは

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \left( \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) = (1, 0.5, 2)$$

**[問題 7-12]** 平面の方程式がさらにずれて  $x + 0.5y + 2z = 5.25 + 2$  となるとき、平面から原点への垂

線の長さを求めよ.

**[5] 外積を用いた平面に垂直な直線 :**

また, 平面に垂直な直線はベクトルの外積を用いても計算できる.

平面の式

$$Ax + By + Cz = E$$

を書き直して,

$$z = -\frac{E}{C} - \frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y$$

$z$  の  $x$  方向,  $y$  方向への傾きは ( $x$ ,  $y$  で偏微分して) 一次関数なので,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{B}{C}$$

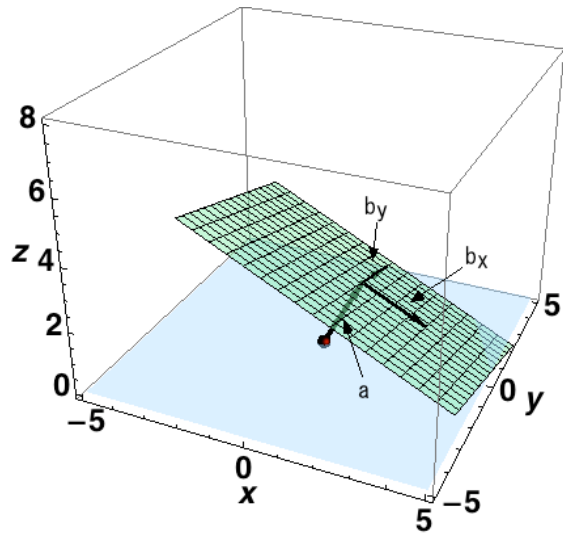


図 7-54

従って,  $z$  平面は  $x$  軸方向に  $C$  だけ動いたときに  $-A$  だけ  $z$  方向に動くので, ベクトルの

方向は  $\mathbf{b}_x = (C, 0, -A)$  となる. 同様に  $y$  軸方向に  $C$  だけ動いたとき  $-B$  だけ  $z$  方向に動くのでベクトルの方向は  $\mathbf{b}_y = (0, C, -B)$  となる. また  $z$  平面は点  $P(0, 0, -E/C)$  を通る.

従って外積を用いて垂直なベクトルを計算できる. その成分は

$$\mathbf{d} = \mathbf{b}_x \times \mathbf{b}_y = (-(A)C, -C(-B), C^2) = (AC, BC, C^2) = C(A, B, C)$$

原点からのベクトル  $\mathbf{a}$  を, 媒介変数  $t$  を用いて表し,

$$\mathbf{a} = t\mathbf{d} = tC(A, B, C)$$

とおくと, その成分は

$$x = tCA, y = tCB, z = tC^2$$

これを平面の式に代入すると交点での  $t$  を求めることができる.

$$Ct(A^2 + B^2 + C^2) = E$$

これから得られた

$$t = \frac{E}{(A^2 + B^2 + C^2)C}$$

を原点からのベクトル  $\mathbf{a}$  に代入すると, 平面上の垂線と交わるベクトル

$$\mathbf{a} = t\mathbf{d} = \frac{E}{(A^2 + B^2 + C^2)}(A, B, C) \tag{7-35}$$

が得られる. これは前に得られた式と同じである.

**§ 7.7.3. 円や球面のベクトル表示**

円や球面もベクトル表示できるが, 表現が簡単になるだけで, 実用上は取り立てて便利になるわけではない. 平面上で中心から一定の距離にあるのが円で, 3D空間で中心から一定の距離にあるのが球である.

円上あるいは球上の点を  $\mathbf{r}$ ，中心のベクトルを  $\mathbf{a}$ ，半径を  $b$  とすると，簡単に

$$|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = b \quad (7-36)$$

で表せる．通常の座標で表すと， $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}$  より

$$(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 = b^2$$

また，3次元座標では $|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2}$  より

$$(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2 = b^2$$

となる．

#### 参考文献

- 7.1. 安達忠治「ベクトルとテンソル」培風館

## 第 8 章. 行列と行列式

以上のように連立 1 次方程式は消去法を用いて計算できるが, ”行列” という考え方をを用いて解くこともできる. これはさらに複雑な連立 1 次方程式にも使え, 応用範囲が広い.

### § 8. 1. 行列を用いた連立方程式の表現法

連立一次方程式は消去法を用いて計算できるが, さらに複雑な連立一次方程式は”行列” という考え方をを用いて解くことができる.

例えば, 下の 2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ 2x + y = 7 & (2) \end{cases}$$

を

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と書き, 下に示すようにこのとき係数を並べた左側を行列, 真ん中を数ベクトル, 右を拡大係数行列という.

$$\text{行列: } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{数ベクトル: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{拡大係数行列: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

また, 行列は数ベクトルの集まりである. 行列とベクトルのかけ算は, 次のように線の方角にかける.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**行列は数を並べただけのものであり, その結果, 数多くの数を同時に扱うことができる.**

次の 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 & (1) \\ 2x + y + 3z = 2 & (2) \\ x + 3y + z = 3 & (3) \end{cases}$$

の場合, 行列を用いると,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書けるので, 拡大係数行列は下の右のようになる.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ここではコンピュータを用いて解く際にも利用される, 非常に理解しやすい**ガウスの消去法**について説明する. コンピュータシミュレーションでよく用いられる偏微分方程式は連立 1 次方程式に変換して, 行列を用いて解くことができる. 病院で使われているコンピュータトモグラフィ (CT) のように, 未知数の数が方程式の数よりも多い場合は, 解を求めることができないので, いろいろな仮定をおいて解を推定する.

1次関数や1次方程式は線形の狭い範囲でしか使えないような気がするが、1次方程式の集まりである連立1次方程式は想像以上に幅広い応用があり奥が深い。

## § 8.2. 行列の行演算

### § 8.2.1. 方程式での消去法 (未知数が2個の場合, 2行2列の方程式)

2.9.節の連立方程式で、(2)式から(1)の両辺に2をかけたものを辺々差し引くと、(1)''が得られる。

$$\begin{cases} x - y = -1 & (1)' \\ 2x + y = 7 & (2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = -1 & (1)' \\ (2x + y) - (2x - 2y) = 7 - (-2) & (2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y = -1 & (1)' \\ 3y = 9 & (2) \end{cases}$$

$y = 3$ を(1)に代入すると $x = 2$ が得られる。

### § 8.2.2. 行列を用いたガウスの消去法：

連立方程式を拡大係数行列に直し、消去法と本質的に同じである、次の“**行列の行演算**”を用いて解く。

“**行列の行演算**”では

- (1) 方程式に定数をかけても、
- (2) 2つの方程式の順番を入れ替えても、
- (3) 方程式を何倍かしたものを、一方の方程式に足したり、引いたりして方程式を変形しても、

2直線の交点の位置(解)は変化しない。

このような操作を行って、なぜ連立方程式の解を求めることができるかを本書では詳しく説明する。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

に書き直す。

### 拡大係数行列の変形：

1行目をline1, 2行目をline2とし、行列の右側に表す。変形するときにもう一方の行はそのままにしておくことが大事である。同時に2つの行を変形してはいけない。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} line1 \times 2 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ line2 - line1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} line1 / 2 \\ line2 / 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} line1 + line2 \\ \end{matrix}$$

これを元の式に戻すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるので、解は  $x=2, y=3$  となる。これらの操作は【1】の方程式での消去法に対応している。

**§ 8. 2. 3. 行列の行演算の 2 次元グラフによる理解：**

これらの操作で本当に解が求まるかを、まず 2 次元のグラフを用いて確認してみよう。

(1) 式と (2) 式を次のように変形して、

$$\begin{cases} (x - y + 1) = 0 & (1) \\ (2x + y - 7) = 0 & (2) \end{cases}$$

さらに (2) 式 - 2x(1) 式を (2)' として、(1) 式と並べると、

$$\begin{cases} (x - y + 1) = 0 & (1) \\ (2x + y - 7) - 2(x - y + 1) = 0 & (2)' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x - y + 1) = 0 & (1) \\ 3y - 9 = 0 & (2)' \end{cases}$$

(1) (2) の交点は、図 8- 1 に示すように、(1) (2)' の交点と同じである。ちなみに

$$(2) \text{ 式} - 3 \times (1) \text{ 式} \quad (2) \text{ 式} - (1) \text{ 式}$$

でも同じ交点となる。(2) 式 - 2x(1) 式とする理由は x を消去するため、そうすれば x に依存しない水平線 ( $y=3$ ) になるからである。

**このように方程式を何倍かしたものを、一方の方程式に足したり、引いたりして式を変形しても、2 直線の交点の位置は変化しない。**

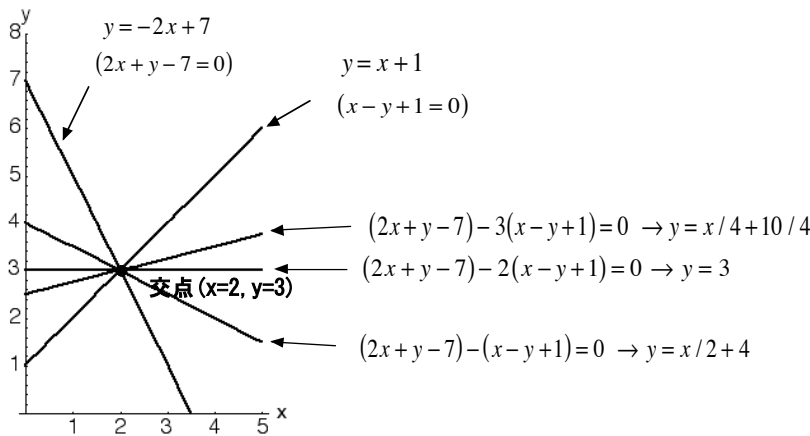


図 8- 1

**§ 8. 2. 4. 行列の行演算の 3 次元グラフによる理解**

”直線は 3 次元空間に描いた平面が  $z = 0$  の平面と交わったところにある線である”ことを用いるとさらによく理解できる。上の (1) (2) 式を

$$\begin{cases} f(x, y) = x - y + 1 & (1) \\ g(x, y) = 2x + y - 7 & (2) \end{cases}$$

とおくと、2つの関数  $f(x, y), g(x, y)$  は  $x, y$  の関数であり図 8- 2 左に示すような立体平面となる。これが  $z = 0$  平面と交わるところが  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$  となる2つの直線を表し、その交点が解である。

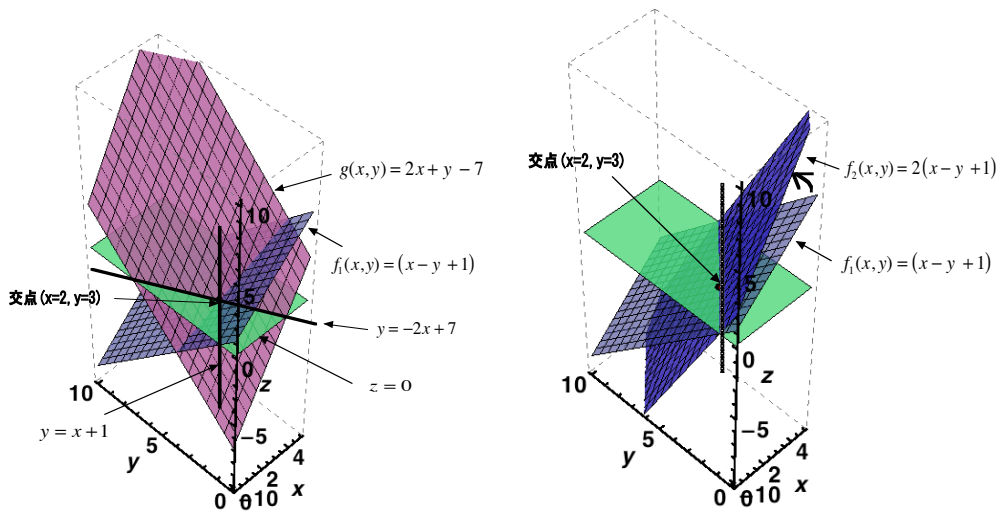


図 8- 2

**(1) 方程式に定数をかけても交点の位置は変化しない。**

図 8- 2 右に示すように、次の方程式  $f_1(x, y)$  と 2 倍した方程式  $f_2(x, y)$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x - y + 1 & (1) \\ f_2(x, y) = 2(x - y + 1) & (1)' \end{cases}$$

を 3 次元図に描いてみれば、 $f_1(x, y)$  平面は倍数をかけることによって  $z = 0$  平面と交わる直線の周りで回転することがわかる。 $z = 0$  平面と交わる直線自体は変化しないので、最終解である交点の位置も変化しない。

**(2) 「方程式 2 つの式の順番を入れ替えても変化しない」** これは当然である。

**(3) 方程式を何倍かしたものをもう一方の方程式から引いたり、足したりして方程式を変形しても、元の式の交点の位置は変化しない。**

即ち、(2) 式  $- 2 \times$  (1) 式を (2)' とし、

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x - y + 1 & (1) \\ f_2'(x, y) = (2x + y - 7) - 2(x - y + 1) = 3y - 9 & (2)' \end{cases}$$

この 2 つの立体平面を図 8- 3 に示す。(2)' の第 1 項と第 2 項はどちらも  $x$  軸方向に同じだけ増加するので、それらを差し引いた関数  $f_2'(x, y)$  は  $x$  軸方向に依存しなくなる。即ち  $x$  軸に平行で、 $y = 3$  を通る立体平面になる。このときの最終的な解である交点はもちろん変化しない。

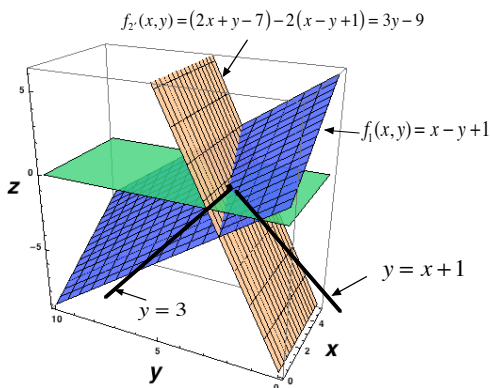


図 8- 3

y を消去するという事は 2 つの関数の y 方向の傾きを同じにして差し引くことなので、y 軸方向には変化しなくなり、x の値が求まる。このように 3 次元の図を描いてみることによって、“連立方程式を解くということは、平面を回転させ、差し引いて一方向に一定な平面に直して、そこから交点を算出することである。”ということを理解することができる。行列を変形するとき、もう一方の行はそのままにしておくことが大事で、同時に 2 つの行を変形してはいけないとのべたが、これは**同時に式を変形すると、交点の位置がわからなくなるからである**。交点の位置は変形前も変形後も同じでなければ解を求めることはできない。

なお、未知数が 3 つになると 4 次元に図を描かなければいけないので、もはやこの方法で説明するのは不可能になるが、そうなるであろうことはなんとなく想像できるであろう。

この“**行列の行演算**”はきわめて一般的で、これを用いると何次の連立方程式でも解くことができる。行列の行演算を行列の変形に利用するのがガウスの消去法と呼ばれる方法である。

**§ 8.2.5. 未知数が 3 個の場合の方程式上での消去法 (3 行 3 列の連立方程式)**

さらに未知数が多い場合、方程式のまま行列の行演算を利用して解いてみよう。

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 & (1) \\ 4x + 6y + 3z = 28 & (2) \\ 8x + 8y + 9z = 58 & (3) \end{cases}$$

(1) 式はそのままとし、(2) と (3) の x を消去して、

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 & (1) \\ 4y + z = 6 & (2)' = (2) - 2 \times (1) \\ 4y + 5z = 14 & (3)' = (3) - 4 \times (1) \end{cases}$$

(1) 式はそのままとし、次に (3) ' の y を消去して、

$$\begin{cases} 2x + y + z = 11 & (1) \\ 4y + z = 6 & (2)' \\ 4z = 8 & (3)'' = (3)' - (2)' \end{cases}$$

このように前から順々に未知数を消してゆくの前進消去法という。z = 2 を求め、それを (2) ' に代入し y = 1、また (1) に代入し x = 4 を得る。このように、後ろから代入して未知数を求めていくので後退代入法という。これがガウスの消去法の特徴である。

**§ 8.2.6. 3 行 3 列の行列を用いた消去法 :**

上の 3 行 3 列の連立方程式の係数を拡大係数行列とし、ガウスの消去法で解を求めてみよう。

**前進消去法**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 4 & 6 & 3 & 28 \\ 8 & 8 & 9 & 58 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ line2 - 2 \times line1 \\ line3 - 4 \times line1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ line3 - line2 \end{matrix}$$

**後退代入法**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{line3}/4 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{line2} - \text{line3} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{line2}/4$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{line1} - \text{line2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{line1}/2$$

これは

$$\begin{cases} x & = 4 \\ y & = 1 \\ z & = 2 \end{cases}$$

と同じである。従って、 $x=4$ ,  $y=1$ ,  $z=2$ を得る。

**【問題 8- 1】** 次の連立方程式（問題 2- 9 と同じ）を行列にしてガウスの消去法でとけ。

$$(1) \begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

#### § 8. 2. 7. 4 行 4 列の行列でのガウスの消去法：

このガウスの消去法を用いると、さらに大きな連立方程式を解くことができる。

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 14 \\ 4x + 4y + 3z + 2w = 32 \\ 6x + 8y + 9z + 3w = 59 \\ 8x + 10y + 10z + w = 65 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと、 $x=4$ ,  $y=1$ ,  $z=2$ ,  $w=3$ が得られる。

これを拡大係数行列で表し、前進消去していくと

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 32 \\ 6 & 8 & 9 & 3 & 59 \\ 8 & 10 & 10 & 1 & 65 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 17 \\ 0 & 6 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{line2} - 2 \times \text{line1} \\ \text{line3} - 3 \times \text{line1} \\ \text{line4} - 4 \times \text{line1} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3.5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{line2} - 2 \times \text{line1} \\ \text{line3} - 2.5 \times \text{line1} \\ \text{line4} - 3 \times \text{line2} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \text{line3}/3.5$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line4} - 3 \times \text{line3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line4} / (-3)}$$

後退代入法では

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line2} - \text{line3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line2} / 2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} - \text{line4}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} - \text{line3}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} - \text{line2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} / 4}$$

となるので、 $x = 4$ ,  $y = 1$ ,  $z = 2$ ,  $w = 3$ が得られる。

どんなに次数が大きくなってもしっかりと計算することができる。これはコンピュータを用いて計算するのに適している。また、**行列の中は具体的な数字の方がよい。**

**【問題 8-2】** 次を行列にしてガウスの消去法でとけ。

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ 2x + 3y + 4z + w = 24 \\ 3x + 4y + z + 2w = 22 \\ 4x + y + 2z + 3w = 24 \end{cases}$$

### § 8.3. クラメールの公式

もし、行列の中が数値でなく、記号のままであったら次のような計算法が便利である。ここでは、2行2列、3行3列の場合の連立方程式を扱う。

#### § 8.3.1. 2x2 の連立方程式のクラメールの公式による解法

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{8-1}$$

は次のように行列を用いて書ける。右の様に簡単な表示もまたよく使われる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{c}$$

これを，拡大係数行列を用いて書けば

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

これをガウスの消去法で解いてみよう．

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 - a_2 b_1 / a_1 & c_2 - c_1 a_2 / a_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line2} - a_2 / a_1 \times \text{line1}} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\text{line2}}{b_2 - a_2 b_1 / a_1}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\text{line2}}{b_2 - a_2 b_1 / a_1}} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 - b_1 \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1} \\ 0 & 1 & \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} - b_1 \times \text{line2}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{c_1 - b_1 \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1}}{a_1} \\ 0 & 1 & \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} / a_1}$$

従って，

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1 \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1}}{a_1} = \frac{c_1 (b_2 - a_2 b_1 / a_1) - b_1 (c_2 - c_1 a_2 / a_1)}{(a_1 b_2 - a_1 b_1)} = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y = \frac{c_2 - c_1 a_2 / a_1}{b_2 - a_2 b_1 / a_1} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}$$

これは，次のような行列式を用いて表すことができる．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

これは

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

の係数行列を計算したものであることがわかる．即ち連立方程式の解は行列式を用いると，

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad (8-2)$$

これはまた，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

とも書ける.

### § 8.3.2. クラメールの公式のベクトルによる理解

では、この行列式にはどのような意味があるのだろうか？行列式は何を表すかを幾何学的に示すことができる。ここで、前章で学んだベクトルを用いるとその意味が理解できる。2 x 2 の連立一次方程式は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とにおいて、これらを列ベクトルと呼ぶ。 $a_1, b_1 \dots$ 等はその成分である。この列ベクトルは連立方程式をベクトルで表現するときによく用いられる。後のベクトルの章では行ベクトル $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$ 、 $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ 、 $\mathbf{C} = (c_1, c_2)$ が出てくるが、結局はどちらも同じである。

また、これは

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

とも書けるので、行列は2つのベクトルの集まりであることがわかる。

**行列はベクトルの集まりである**

上の連立一次方程式は次のように書ける。

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{By} = \mathbf{C} \tag{8-3}$$

ここで、両辺のベクトルに右側から $\mathbf{B}$ を外積 ( $[ ] \times \mathbf{B}$ ) すると、得られる式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}x + \mathbf{B} \times \mathbf{B}y = \mathbf{C} \times \mathbf{B}$$

において、 $y$ の係数である $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$ は0だから $x$ を求めることができる。即ち、

$$x = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{B}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$$

次に両辺のベクトルに左側から $\mathbf{A}$ を外積 ( $\mathbf{A} \times [ ]$ ) すると、 $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ だから $y$ を求めることができる。

$$x\mathbf{A} \times \mathbf{A} + y\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

即ち,

$$y = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$$

ここで,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{C} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

となる. ベクトルの外積は2つのベクトルの作る平行四辺形の面積を表すので, 2 x 2の連立方程式の行列式は平行四辺形の面積を表す.

従って,

$$x = \frac{\mathbf{C} \times \mathbf{B}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{8-4}$$

となる. これが2 x 2の連立方程式のクラメールの公式である.

この値が実際に平行四辺形の面積になるのは後のベクトルの章に詳しく示している. ここでは別の方法でそうなることを示す. 平行四辺形OBGAの面積は, 長方形ODECの面積  $a_1 b_2$  から, 重複している長方形EFGHの面積  $a_2 b_1$  を差し引いたものである.

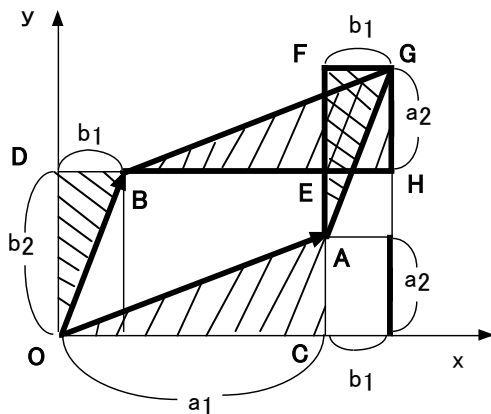


図8-4

即ち,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

平行四辺形OBGAの面積を求めるために, 三角形ODBと三角形OACを上へ平行移動して, 太い黒線で囲まれた面積とする. この2つの三角形が重なった部分と, その外側の三角形FGJとKGHの分, 即ち, 長方形EFGHの分だけ面積は広がっているのでそれを差し引くと求めることができる.

### § 8.3.3. 2x2の行列式の計算

行列式が列ベクトルの外積で表されるということがわかれば, 列に関する行列式の計算をうまく理解できる. ここではベクトルは列ベクトルとする.

**転置行列:** 列ベクトルを行ベクトルに変換した行列.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

の転置行列は  $a_2$  と  $b_1$  が入れ替わった行列である.

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

**転置行列式** : 列ベクトルを行ベクトルに変換した行列式

$a_2$  と  $b_1$  が入れ替わるので,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

**転置行列式も同じ値を持つ**ことがわかる. 従って**行列式が列ベクトルについて成り立てば, それは行ベクトルについても成り立つ**ことを意味する. それはどちらか一方を示すだけで良いことを意味するが, 本書では両方を確認してみよう.

### § 8.3.3.1. 列に関する行列式の計算 (列ベクトルによる理解)

(1) 1 列目と 2 列目が同じ場合 : 行列式は 0 になる

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

これは  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$  だからである

(2) 1 列目と 2 列目を入れ替えた場合 : 行列式は符号が変わるだけである. (注 : 行列の場合符号は変化しない)

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 b_1 - a_1 b_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

これは  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \times \mathbf{A}$  ということなので, 符号が変わることがわかる.

(4) 1 列目を  $k$  倍した場合 : 行列式も  $k$  倍になる. (注 : 行列の場合, 変化しない)

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

これは  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \rightarrow k\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  からすぐにわかる. 幾何学的には一つのベクトルの長さが  $k$  倍になるので, 面積も  $k$  倍される.

(5) 1 列目を  $k$  倍して 2 列目に足したり引いた場合 : 行列式は変化しない. (注 : 行列の列演算と同じ)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

これは  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \pm k\mathbf{A}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \pm k\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . 足し算の場合, 幾何学的には, 下図に示すように平行四辺形  $OBCA$  と  $OEDA$  は同じ底辺を持ち, 同じ高さであるから面積は同じである.

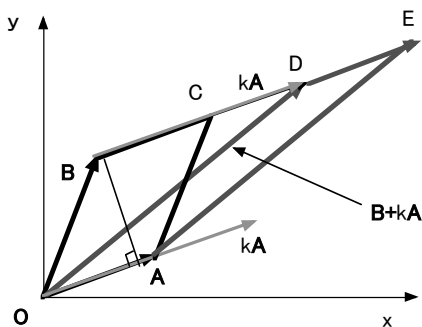


図 8-5

§ 8.3.2.2. 行に関する行列式の計算

行に関しても同様な性質が成り立つが、ここでは前章と同じように列ベクトルと幾何学で理解してみよう。

(1) 1 行目と 2 行目が同じ場合： 行列式は 0 になる

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \mathbf{A}' \times k\mathbf{A}' = 0$$

幾何学的には列ベクトル  $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$  とベクトル  $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$  は  $45^\circ$  の同じ直線上にあるので、面積は

0 である。

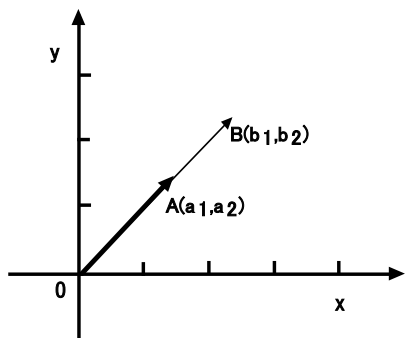


図 8-6

(2) 1 行目と 2 行目を入れ替えた場合： 行列式は符号が変わるだけである。(注：行列の場合，符号は変化しない)

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

幾何学的には、ベクトル  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  とベクトル  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  の位置が入れ替わり、 $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$  と

$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}$  となるので、 $\mathbf{A}' \times \mathbf{B}'$  の絶対値は同じであるが、図 8-7 の右に示すように向きが逆になる

るので符号が変わる。

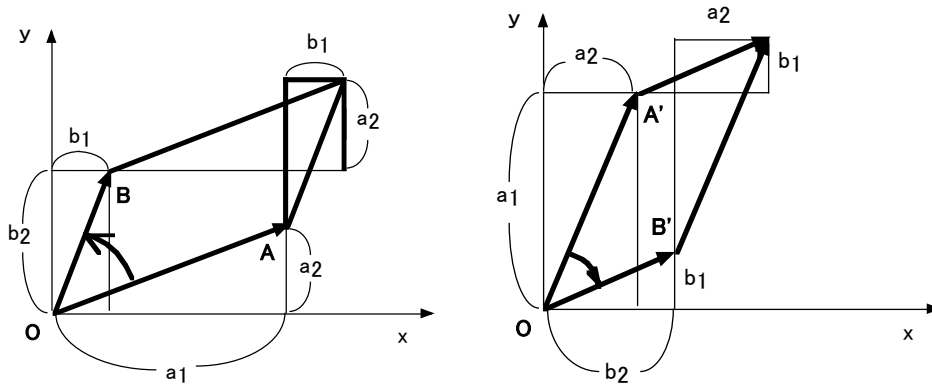


図8-7 左図：行の入れ替え前. 右図：行の入れ替え後

(3) 1 行目を  $k$  倍した場合：行列式も  $k$  倍になる。（注：行列の場合，変化しない）

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (ka_1)b_2 - (kb_1)a_2 = k(a_1b_2 - b_1a_2) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

幾何学的にはベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  が  $x$  軸方向に  $k$  倍だけ長くなるので，長方形の面積は  $(ka_1)b_2$ ，差し引く面積は  $(kb_1)a_2$  であるから，結局前の面積の  $k$  倍になる。

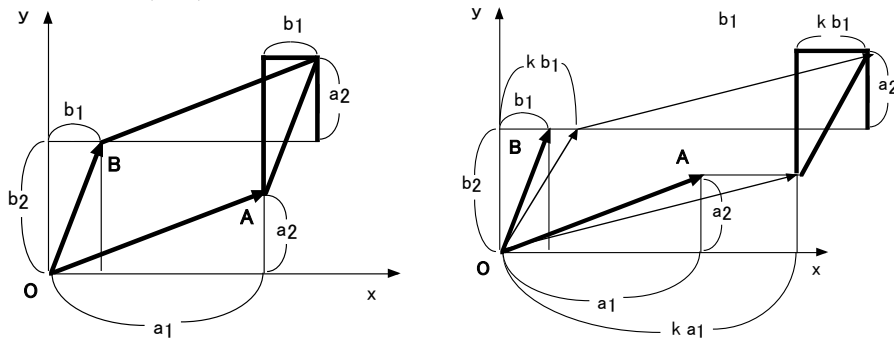


図8-8

この場合  $B$  点は  $x$  軸方向に  $(k-1)b_1$  だけ， $A$  点は  $(k-1)a_1$  だけ移動している。

(4) 1 行目を  $k$  倍して 2 行目に足したり引いた場合：行列式は変化しない。（注：行列の行演算と同じ）

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 \end{vmatrix} = a_1(b_2 + kb_1) - (a_2 + ka_1)b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

幾何学的には

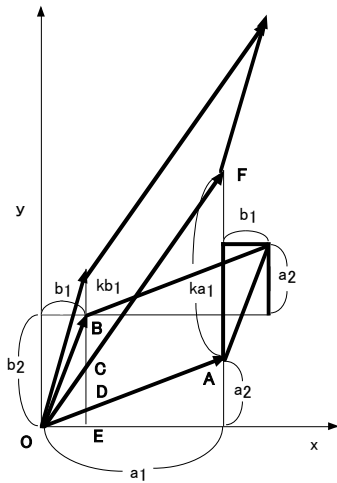


図 8- 9

上で用いたのと同じ方法で証明することができる

$$CD = CE - ED = b_1 \frac{a_2 + ka_1}{a_1} - b_1 \frac{a_2}{a_1} = b_1 \frac{ka_1}{a_1} = kb_1$$

$$FA = ka_1$$

このようにDがCまで  $kb_1$ 、AがFまで  $ka_1$ だけ移動するので、(3)の図8-8の右図と同じであり、結局面積は同じになる。

このように行列式の計算においても行に関する基本変形が行えるので、行列式を簡略化して計算を行うことができる。これは  $3 \times 3$ の行列式でも成り立つ。また、列に関しても基本変形が行えるので、さらに計算が便利になる。

**行列式の計算においても行(列)に関する基本変形が行える**

**[例題 1] 回路計算への適用**

電気工学においてよく現れる回路網を計算するには次のような方法がある。

**[ 1 ] 岐路電流法**

図のような電気回路の電流値を求めてみよう。電流の流れる経路が3箇所あるので、それぞれの電流を  $I_1, I_2, I_3$  とおく。電流の保存則である、電流が2手に分かれてもそれらの和と元の電流は等しい「キルヒホフの第一法則」より、

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1}$$

電圧に関する「キルヒホフの第二法則」より、電流合流点Bでの電圧を基準にした2つの電流路の電圧は等しいので、

$$R_1 I_2 + V_2 = R_2 I_3 \tag{2}$$

電流  $I_1$  に関する回路では

$$R_2 I_3 + R_3 I_1 = V_1 \tag{3}$$

となり、3つの方程式が得られる。

(1)より得られる  $I_3 = I_1 - I_2$  を (2) (3) に代入すると、2つの方程式が得られる。

$$R_2(I_1 - I_2) + R_3 I_1 = V_1 \quad (3)'$$

$$R_1 I_2 - R_2(I_1 - I_2) = -V_2 \quad (2)'$$

これは未知数が  $I_1$  と  $I_2$  の2つなので解くことができる。

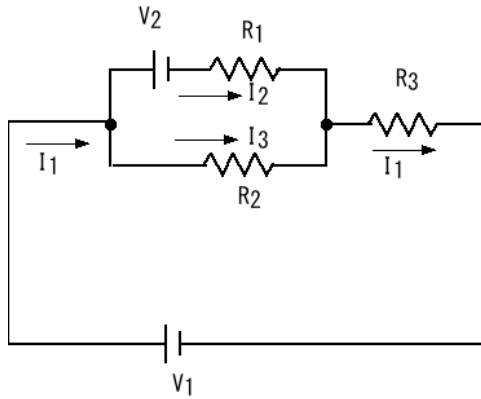


図 8- 10

### [ 2 ] 網目電流法

次のように時計方向に一周する電流ループ  $I_1, I_2$ , の2つを考える.  $I_1$  の電流ループ回路の一周電圧は  $R_2$  を流れる電流  $I_1$  と逆方向に流れる  $I_2$  なので, その間の電圧は  $R_2(I_1 - I_2)$  である.  $R_3$  には一方向電流しかないのでその電圧は  $R_3 I_1$ , その合計電圧が  $V_1$  に等しい. 時計方向に電流を流す電圧を+とする.

$$I_1 \text{ の電流ループ : } R_2(I_1 - I_2) + R_3 I_1 = V_1$$

$$I_2 \text{ の電流ループ : } R_1 I_2 + R_2(I_2 - I_1) = -V_2$$

結局, 岐路電流法と同じ方程式が得られる. このように**網目電流法**が回路計算にはきわめて便利である.

$$\begin{cases} (R_2 + R_3)I_1 - R_2 I_2 = V_1 \\ -R_2 I_1 + (R_1 + R_2)I_2 = -V_2 \end{cases}$$

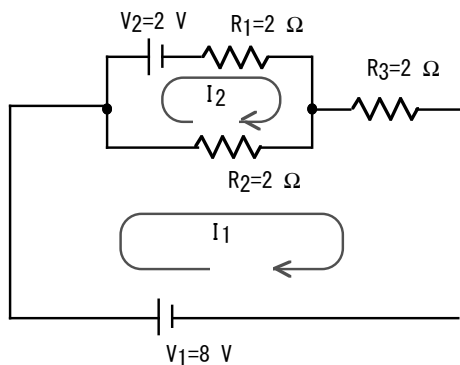


図 8- 11

具体的に数値を代入して, 計算すると

$$\begin{cases} 4I_1 - 2I_2 = 5 \\ -2I_1 + 4I_2 = -4 \end{cases} \quad \dots > \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

クラメールの公式を用いて

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 4 \\ 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{16-4} = \frac{20-8}{12} = \frac{12}{12} = 1, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -4 \\ 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{16-4} = \frac{-16+10}{12} = \frac{-6}{12} = -0.5$$

従って、 $I_1$ は図の方向に1 A 流れ、 $I_2$ は図とは逆方向に0.5 A 流れることがわかる。

**[問題 8-3]** 次の回路に流れる電流を網目電流法を用いて求めよ。  $V_1=4$  V,  $V_2=1$  V,  $R_1=R_2=R_3=1$   $\Omega$  とする。

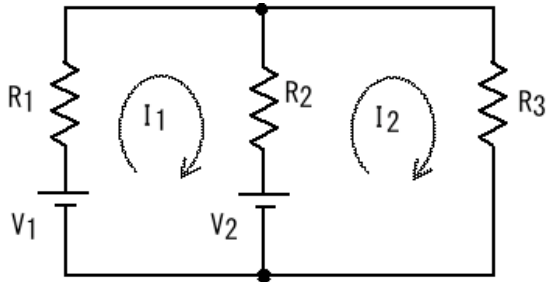


図 8- 12

**§ 8. 3. 2. 3x3 連立方程式の行列による解：クラメールの公式**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (8-5)$$

を行列とベクトルに書き直して

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}y + \mathbf{C}z = \mathbf{D}$$

右から  $\mathbf{B}$  を外積し、さらに  $\mathbf{C}$  を内積すると  $([\ ] \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ ,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}x + \mathbf{B} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}y + \mathbf{C} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}z = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

ここで、 $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{C} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = 0$  であるから、

$$x = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}$$

次に左から  $\mathbf{A}$  を外積し，右から  $\mathbf{C}$  を内積すると  $(\mathbf{A} \times [ \ ] \cdot \mathbf{C})$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}x + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}y + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}z = \mathbf{A} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = 0$  であるから，

$$y = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}$$

次に左から  $\mathbf{A}$  を外積し，さらに内積すると  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot [ \ ])$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}x + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}y + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}z = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0$  なので，

$$z = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}$$

ここで，前章のベクトルで学んだように，

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となるので， $x$ ， $y$ ， $z$  は

$$x = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{d}_1 & b_1 & c_1 \\ \mathbf{d}_2 & b_2 & c_2 \\ \mathbf{d}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{d}_1 & c_1 \\ a_2 & \mathbf{d}_2 & c_2 \\ a_3 & \mathbf{d}_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{d}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{d}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{d}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad (8-6)$$

このクラメールの公式は実用的ではないが，解のパラメータ依存性を理解するには便利である。

このとき，右下の方向に掛けてそれを+，右上に方向に掛けたものを差し引いて

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

となる.

行に関する基本変形は  $3 \times 3$  の行列式においても成り立つ. それは, 上に用いたベクトルのスカラー三重積を用いて説明ができる.

(1) 1 列目と 3 列目が同じ場合: 行列式は 0 になる

$$\begin{vmatrix} A_x & B_x & A_x \\ A_y & B_y & A_y \\ A_z & B_z & A_z \end{vmatrix} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = 0$$

(2) 2 列目 3 列目を入れ替えた場合: 行列式は符号が変わるだけである.

$$\begin{vmatrix} A_x & C_x & B_x \\ A_y & C_y & B_y \\ A_z & C_z & B_z \end{vmatrix} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}$$

(3) 1 列目を  $k$  倍した場合: 行列式も  $k$  倍になる.

$$\begin{vmatrix} kA_x & B_x & C_x \\ kA_y & B_y & C_y \\ kA_z & B_z & C_z \end{vmatrix} = (k\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = k \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}$$

(4) 1 列目を  $k$  倍して 2 列目に足したり引いた場合: 行列式は変化しない.

$$\begin{vmatrix} A_x & B_x + kA_x & C_x \\ A_y & B_y + kA_y & C_y \\ A_z & B_z + kA_z & C_z \end{vmatrix} = (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + k\mathbf{A})) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} + \underbrace{(\mathbf{A} \times (k\mathbf{A})) \cdot \mathbf{C}}_0 = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}$$

このように行列式の計算においても列に関する基本変形が行えるので, ガウスの消去法を利用して行列式を簡略化して, 計算を行うことができる. また, 行に関しても基本変形が行えるので, さらに計算が便利になる.

ここで注意しなければいけないこと  
 | 連立方程式を解くときの行列——>”行”の変形  
 | 行列式の計算 ——>”行””列”の両方の変形が可能.

[例題 2] 次の行列式を行演算を用いて計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

【解答】 行の基本変形を用いる.  $\leftrightarrow$  は交換を表す.

$$\rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{line1} \leftrightarrow \text{line2} \\ \\ \end{matrix} \rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{line2} - 2 \times \text{line1} \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{line2} \leftrightarrow \text{line3} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{line3} + 3 \times \text{line2} \end{matrix} = 4$$

行の基本変形を用いると、行列式の次数が大きくなっていくにつれて計算が楽になる.

【問題 8-4】 次の行列式をガウスの消去法を用いて計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 8 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

【例 3】 抵抗を測定できる回路として有名な橋桁の形をした抵抗回路のことをホイートストンブリッジ回路という. 網目電流法で考えると 3 つの電流ループができるので, クラメールの公式を用いてこの複雑な電気回路網の計算を行うことができる.

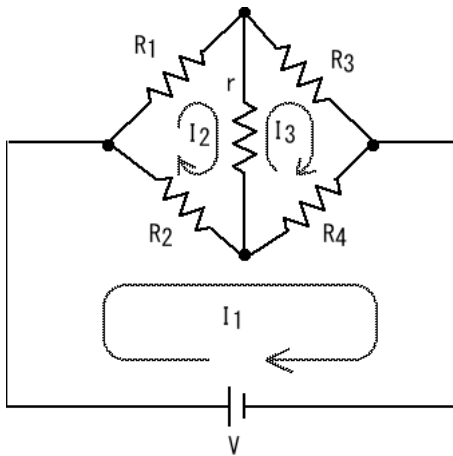


図 8- 13

網目電流法で

$$\begin{cases} R_2(I_1 - I_2) + R_4(I_1 - I_3) = V \\ R_1I_2 + r(I_2 - I_3) + R_2(I_2 - I_1) = 0 \\ R_3I_3 + r(I_3 - I_2) + R_4(I_3 - I_1) = 0 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} (R_2 + R_4)I_1 - R_2I_2 - R_4I_3 = V \\ -R_2I_1 + (R_1 + R_2 + r)I_2 - rI_3 = 0 \\ -R_4I_1 - rI_2 + (R_3 + R_4 + r)I_3 = 0 \end{cases}$$

行列に書き換えると,

$$\begin{pmatrix} (R_2 + R_4) & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & (R_1 + R_2 + r) & -r \\ -R_4 & -r & (R_3 + R_4 + r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

クラメールの公式を用いると

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_2 + R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_1 + R_2 + r & -r \\ -R_4 & -r & R_3 + R_4 + r \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & -R_2 & -R_4 \\ 0 & R_1 + R_2 + r & -r \\ 0 & -r & R_3 + R_4 + r \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{V(R_1 + R_2 + r)(R_3 + R_4 + r) - Vr^2}{\Delta}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_2 + R_4 & V & -R_4 \\ -R_2 & 0 & -r \\ -R_4 & 0 & R_3 + R_4 + r \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{VrR_4 + VR_2(R_3 + R_4 + r)}{\Delta}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_2 + R_4 & -R_2 & V \\ -R_2 & R_1 + R_2 + r & 0 \\ -R_4 & -r & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{VR_2r + V(R_1 + R_2 + r)R_4}{\Delta}$$

ブリッジ回路では抵抗  $r$  を流れる電流が 0 のとき, **平衡条件が成立する** という. 即ち

$$rR_4 + R_2(R_3 + R_4 + r) = R_2r + (R_1 + R_2 + r)R_4$$

$$\cancel{rR_4} + \cancel{rR_2} + R_2R_3 + \cancel{R_2R_4} = \cancel{R_2r} + R_1R_4 + \cancel{R_2R_4} + \cancel{rR_4}$$

これより,

$$R_2R_3 = R_1R_4$$

あるいは

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

が成り立つ.

これは  $R_1$  と  $R_3$  に流れる電流を  $i_1$ ,  $R_2$  と  $R_4$  に流れる電流を  $i_2$  とすると,  $r$  には電流は流れないので, 上の回路の電圧は  $V_A = R_1i_1 + R_3i_1$ , 下の回路の電圧は  $V_B = R_2i_2 + R_4i_2$  となり, 両者の第一項同士は等しく,

第二項同士が等しくなる．これより，

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{i_2}{i_1}, \quad R_3 i_1 = R_4 i_2 \rightarrow \frac{R_3}{R_4} = \frac{i_2}{i_1}$$

同じ結果が得られる．

**【例題 3】** 図のはしご形回路の電流値を求めよ．全部の抵抗が  $2\Omega$ ， $V=10V$  の時のそれぞれの電流値を求めよ．

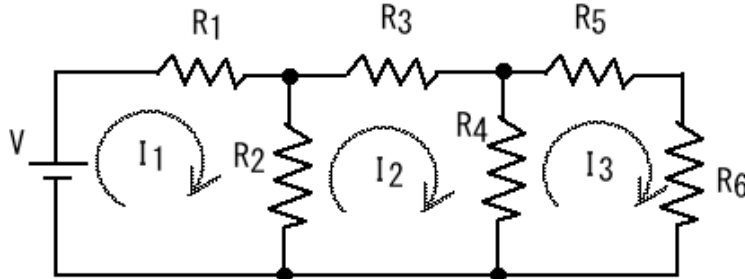


図 8-14

**【解答】** 網目電流法を用いて

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = V \\ R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 + R_4 (I_2 - I_3) = 0 \\ R_4 (I_3 - I_2) + (R_5 + R_6) I_3 = 0 \end{cases}$$

整理して

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 = V \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 - R_4 I_3 = 0 \\ -R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6) I_3 = 0 \end{cases}$$

行列に直すと

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

数値を入れると

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8(18 - 2 - 3) = 104$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{320}{104} = 3.07 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-120}{104} = -1.15 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 10 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{40}{104} = 0.384 \text{ A}$$

### § 8.4. 一次変換

$y=ax$  や  $y=ax^2$  のように、座標のある点を別の点に移すことを**関数**というが、 $A$  を行列とするときその関数が

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \tag{8-7}$$

で表される場合（ただし  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$  は列ベクトル）を**一次変換**または**線形変換**という。これも座標のある点を別の点に移す。 $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{y}$  がベクトルであるから、これは2次元の点や3次元の点の座標を別の点に移すことができる。

以下にみるように、**一次変換**はある点の座標を回転させながら拡大したり、縮小したりする働きを持つ。そのために**画像を回転させたり、引き延ばしたり、縮めたり、ひっくり返したりするのに利用される**。ここではその一部を学ぶ。この一次変換の特別な場合が連立方程式である。

#### § 8.4.1. 点の変換：

次のように行列を用いると、 $(x_1, y_1)$  の点を  $(x_2, y_2)$  に変換することができる。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{8-8}$$

これは、ベクトルを用いると

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y_1$$

と書ける。これはベクトル  $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  は、列ベクトル  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  の  $x_1$  倍と列ベクトル  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  の  $x_2$  倍を合成したベクトル

であることを表している。従って、 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  は基本ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  を  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ベクトルに、基本ベク

トル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ベクトルに変換する。図で描くと、黒いベクトルは黒いベクトルに、灰色のベク

トルは灰色のベクトルに変換される。即ち、回転しながら伸縮している。しかも伸縮の程度はそれぞれの点で異なっている。

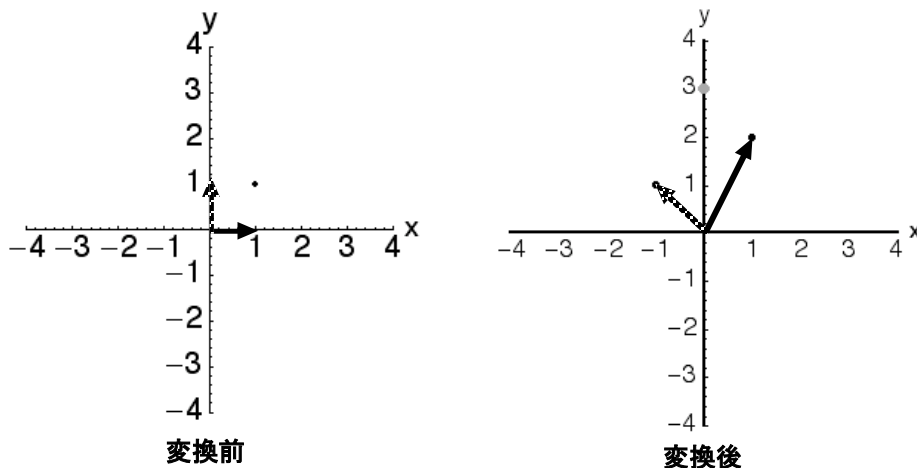


図 8-15

すなわち、連立方程式は1次変換の特別な場合で、

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

どのような点（ここでは黒点  $(x_1, y_1) = (2, 3)$ ）を一次変換すれば、灰色の点  $(x_2, y_2) = (-1, 7)$  になるか？その点を探せということである。

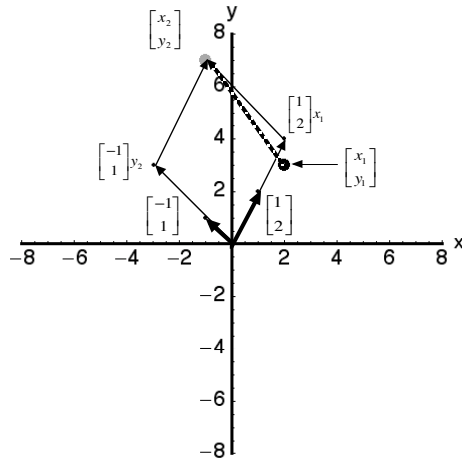


図 8-16

§ 8.4.2. 線の一次変換：

線は点の集まりであるから、点の変換ができれば、線の変換もできる。同じ一次変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{8-8}$$

を用いて、たとえば  $(x_1, y_1) = (2, 3)$  を通る直線

$$y_1 = (2/3)(x_1 - 2) + 3$$

上の点を次々に一次変換していくと、下図のように灰色の直線になることがわかる。この図から点が回転していることがわかるが、大事なことは回転の方向は元の点の位置によって変わることである。

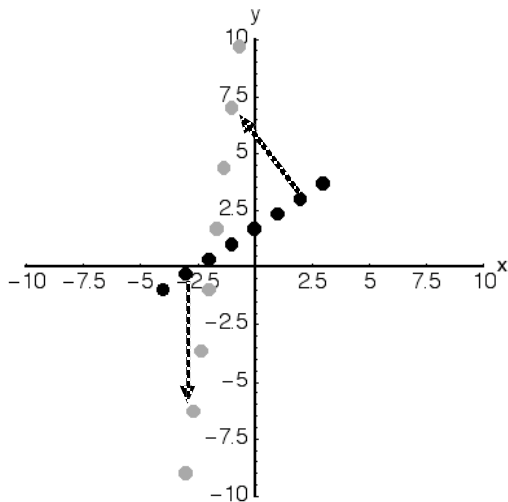


図 8-17

§ 8. 4. 3. 円の一次変換 :

次に  $(x_1, y_1) = (2, 3)$  を通る円を, 再び同じ一次変換

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{8-8}$$

を用いて変換してみると, 下図に示すように楕円になることがわかる. これも変換前の点の位置によって回転の方向が変わっている.

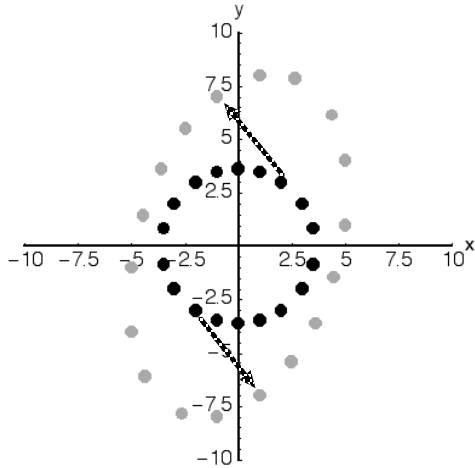


図 8- 18

§ 8. 4. 4. 回転変換 :

下図に示すように, x 座標の点  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  を角度  $\theta$  だけ回転させ,  $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$  に,

y 座標の点  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を角度  $\theta$  だけ回転させ,  $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

とする一次変換は

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} y_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{8-9}$$

と表すことができる. 即ちある点が角度  $\theta$  だけ回転する. [注 : Mathematica による行列の表現は行ベクトルを用いる.]

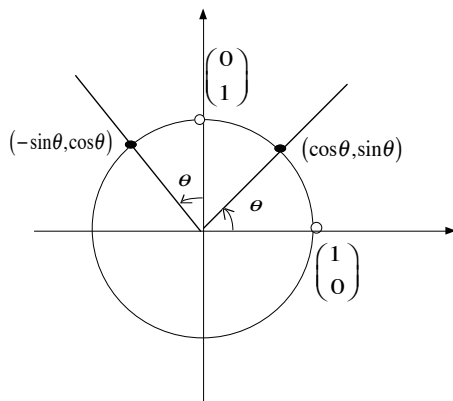


図 8- 19

例えば、 $y = x/3$  上の点列を  $\theta=45^\circ$  で回転変換する式は、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

であり、下図の左に示すように、点列は反時計方向に  $45^\circ$  だけ回転する。

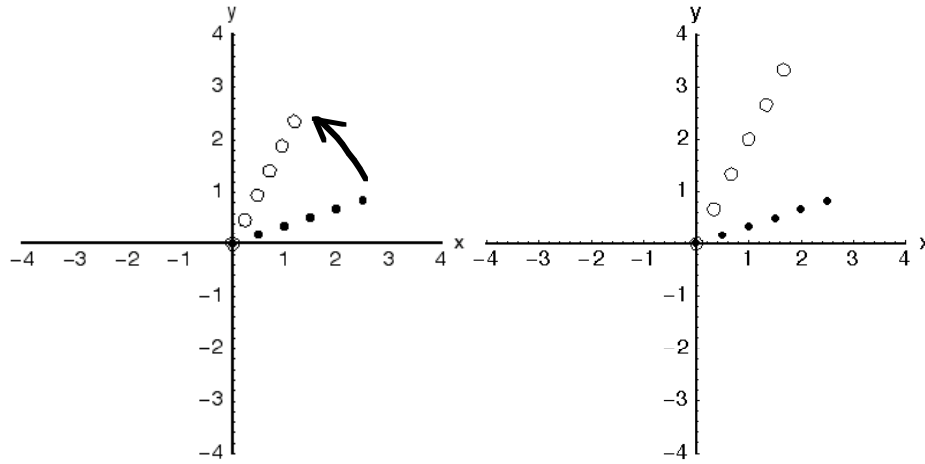


図 8- 20

また、次の  $\sqrt{2}$  倍した一次変換で変換すると

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

点列が反時計方向に  $45^\circ$  だけ回転すると同時に、半径は  $\sqrt{2}$  倍拡大する。(図 2- 16 右)

ここで、回転角度に対応した行列をまとめると、

$$0^\circ \text{ 回転変換 : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 45^\circ \text{ 回転変換 : } \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$60^\circ \text{ 回転変換 : } \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad 90^\circ \text{ 回転変換 : } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$180^\circ \text{ 回転変換 : } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 270^\circ \text{ 回転変換 : } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

の変換について、上の回転変換を考慮してもう一度考えてみよう。この行列は

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

と書き直せるので、図 8- 19 に示すように、 $y_1 = (2/3)(x_1 - 2) + 3$  上の点を原点を中心に  $45^\circ$  回転させ、その後、それぞれの点の位置に応じて  $y$  軸方向にシフトさせると図 8- 15 と同じ図が得られる。このように回転変換と拡大(シフト)で成り立っていることがわかる。

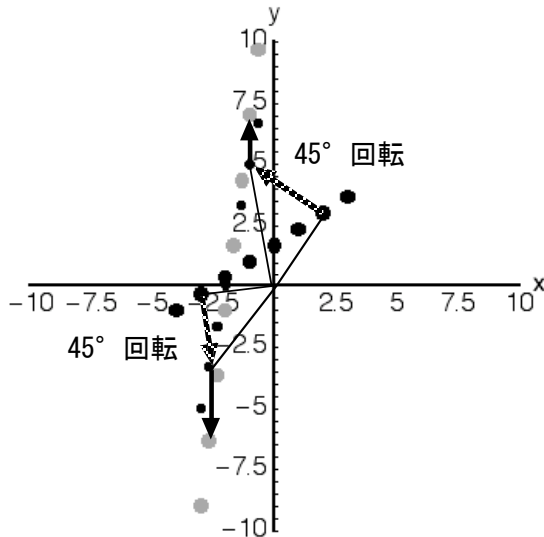


図 8- 21

## § 8. 5. 行列の演算

### § 8. 5. 1. 行列のかけ算

2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

を掛け合わせると、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

掛けた順序が異なると結果も変わること注意到しよう。

行列をベクトルで書けば、

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix}$$

となるので、例えば、点  $(1, 0)$  を変換すると

$$AB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

これを図で示せば,

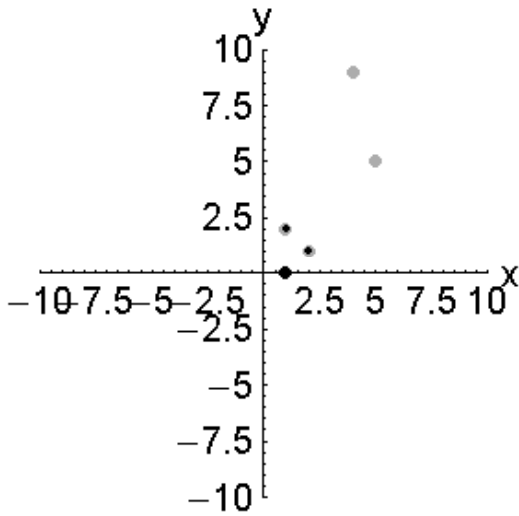


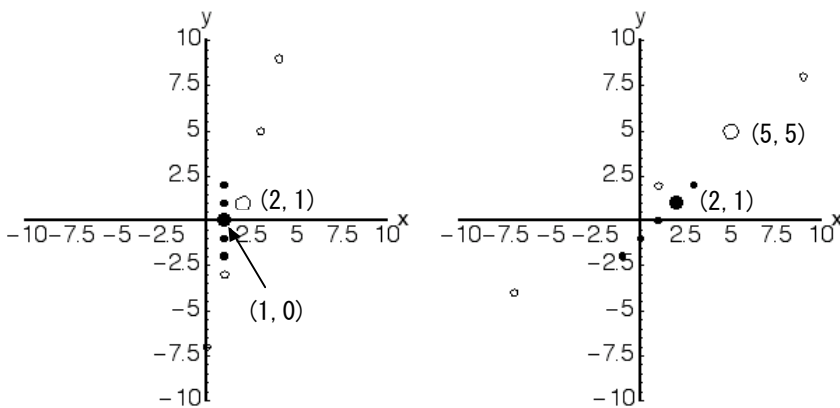
図 8- 22

となり, 最終的な点の位置は異なってくる.

これを別々に描いて調べてみよう. A および B 変換によって黒点は白丸に移る.

[1] B 変換によって,  $(1, 0) \rightarrow (2, 1)$

A 変換によって,  $(2, 1) \rightarrow (5, 5)$



[2] A 変換によって,  $(1, 0) \rightarrow (1, 2)$

B 変換によって,  $(1, 2) \rightarrow (4, 9)$

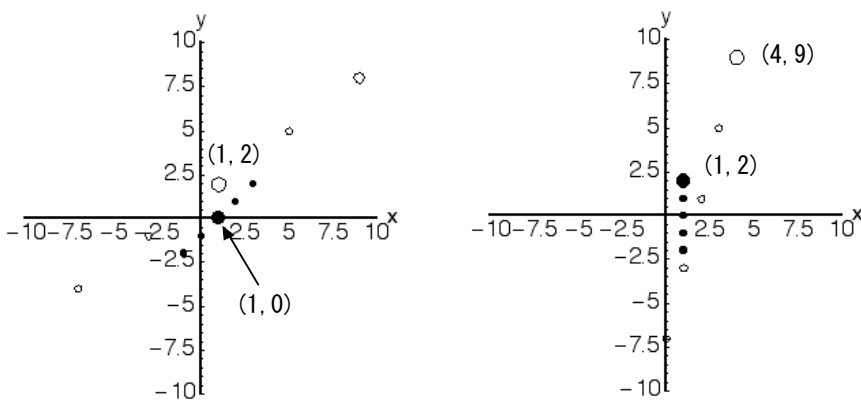


図 8- 23

となり、元の点と同じでも行列を掛ける順序が変わると最終的な位置も変わる。これは一次変換が回転と伸縮を同時に行なうからである。A 行列、B 行列の一次変換で変換する方向が点の位置によって異なるからである。ベクトルを足し算すると単なる平行移動になるが、一次変換は回転と伸縮を表すところが大きく異なっている。

またこれに似ているのは前章で学んだ  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  の関係である。

**[問題 8-5]**

[1] A は (0, -2) を中心として左に 90° 回転させること

[2] B は (0, +2) を中心として左に 90° 回転させること

とする。

では最初に (3, 0) にあった点は A から始めて B を行ったときどこに行くか？B から始めて A を行ったときどこに行くか？これらを比較せよ。

**§ 8.5.2. 単位行列**

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  を単位行列と呼び、これをある行列に掛けるとそっくりそのままその行列になる。

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$BI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = B$$

**§ 8.5.3. 逆行列**

$BA = I$  となる B を A の逆行列といい、 $B = IA^{-1} = A^{-1}$  とかく。

**[1] 2x2 連立方程式の逆行列**

連立方程式を次のように書くと、

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$$

その解は、左から  $\mathbf{A}^{-1}$  を掛けて、

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$  であるから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

となる。従ってクラメールの公式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

から、逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} & \frac{-b_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \\ -\frac{a_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} & \frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \end{pmatrix}$$

となる。従って、逆行列を別の方法で求めることができれば、連立方程式をすぐに解くことができる。

**[2] 3x3 連立方程式の逆行列**

クラメールの公式から逆行列を求めることができる。

$$x = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{d}_1 & b_1 & c_1 \\ \mathbf{d}_2 & b_2 & c_2 \\ \mathbf{d}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{C}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \mathbf{d}_1 & c_1 \\ a_2 & \mathbf{d}_2 & c_2 \\ a_3 & \mathbf{d}_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}}{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{d}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{d}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{d}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

これをまとめると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

これより逆行列は

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

となる。

**[3] ガウスの消去法を用いた逆行列の計算**

次の連立方程式を逆行列を用いて解いてみよう。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 58 \end{pmatrix}$$

この逆行列もガウスの消去法を用いて計算できる.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

の逆行列を, 拡大係数行列を用いて計算してみよう.

これは次のような考え方から理解できる.  $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$  の拡大行列は

$$(\mathbf{A} \ \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{I} \ x) = (\mathbf{I} \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$$

と書けるので, 解は  $x = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  となる.

一方,  $\mathbf{B}$  が単位行列の場合が  $x$  は逆行列となるので,  $\mathbf{Ax} = \mathbf{I}$  の拡大行列は

$$(\mathbf{A} \ \mathbf{I}) \rightarrow (\mathbf{I} \ x) = (\mathbf{I} \ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I})$$

逆行列は  $x = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I})\mathbf{B}$  となる.

上の行列の右側に単位行列を置く.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{line2} - 2 \times \text{line1} \\ \text{line3} - 4 \times \text{line1} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{line3} - \text{line2} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{line3} / 4 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3/2 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{line2} - \text{line3} \end{array} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \text{line2} / 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 11/8 & -5/16 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \text{line1} - \text{line2} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/16 & 1/16 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \text{line1} - \text{line3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/16 & 1/16 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \text{line1} / 2 \end{aligned}$$

従って, 逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 15/16 & -1/32 & -3/32 \\ -3/8 & 5/16 & -1/16 \\ -1/2 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

従って,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/16 & 1/32 & -3/32 \\ -3/8 & 5/16 & -1/16 \\ -1/2 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 58 \end{pmatrix}$$

これから、解  $x$ ,  $y$ ,  $z$  が求まる.

$$\begin{cases} x = 15/16 \times 11 - 1/32 \times 28 - 3/32 \times 58 = 4 \\ y = -3/8 \times 11 + 5/16 \times 28 - 1/16 \times 58 = 1 \\ z = -1/2 \times 11 - 1/4 \times 28 + 1/4 \times 58 = 2 \end{cases}$$

次数の大きな連立方程式ではこのような方法を用いて、コンピュータによって逆行列を計算し解を求めることができる.

#### 参考文献

- 8.1. カルヴィン・C. クロースン「数学の謎」青土社
- 8.2. 薩摩順吉「キーポイント線形代数」岩波書店
- 8.3. 小島寛之「ゼロから学ぶ線形代数」講談社